Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 8

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 22.3.2013 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 12.4.2013 klo 18.00

Tehtävä 16 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

Tehtävissä 1–3 tutkitaan ryhmää $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ja sen aliryhmää $H = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

1. Piirrä tasokoordinaatistoon kuva aliryhmästä H.

2. Piirrä kuvat sivuluokista $(0, 2) + H$, $(-1, 1) + H$ ja $(1, 4) + H$. Miltä näyttää aliryhmän H vasenten sivuluokkien joukko $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/H$? Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

3. Osoita täsmällisesti, että sivuluokat $(0, 2) + H$ ja $(1, 4) + H$ ovat samat.

4.* Tutkitaan ryhmää $G = \{1, a, b, c, d, e, f, g, h\}$, jolla on oheinen kertotaulu. Ryhmällä G on aliryhmä $H = \{1, c, f\}$. Määritä aliryhmän H vasempien sivuluokkien joukko G/H. Perustele vastauksesi.

$\cdot$	1	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h	1
b	b	c	d	e	f	g	h	1	a
c	c	d	e	f	g	h	1	a	b
d	d	e	f	g	h	1	a	b	c
e	e	f	g	h	1	a	b	c	d
f	f	g	h	1	a	b	c	d	e
g	g	h	1	a	b	c	d	e	f
h	h	1	a	b	c	d	e	f	g

5.* Oletetaan, että G on ryhmä ja H sen aliryhmä. Olkoot $a, b \in G$. Täydennä lemman 10.5 todistusta ja todista seuraava väite:

Jos $b \in aH$, niin $aH = bH$.

Neuvo: Väite on muotoa ”jos . . . niin”. Aloita siis todistus olettamalla, että $b \in aH$.

6. Olkoon G ryhmä, jonka kertaluku on pq, missä p ja q ovat alkulukuja. Osoita, että jokainen ryhmän G aito aliryhmä on syklinen.

Tehtäväsarja II

Tutustu renkaita käsittelevään lukuun.

7. Reaalilukujen joukossa voidaan määritellä laskutoimitus $*$ ehdolla $a * b = 2ab$. Onko $(\mathbb{R}, +, *)$ rengas?
8. Merkitään $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{a}{2} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Miksei $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ole rengas tavallisen yhteen- ja kertolaskun suhteen?

Tehtäväsarja III

Renkaan alkiota kutsutaan yksiköksi, jos sillä on käänteisalkio kertolaskun suhteen.

9. Osoita, että $[5]_7$ on renkaan $\mathbb{Z}_7$ yksikkö.
10. Esimerkissä 12.6 on esitelty Boolen rengas $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, missä $X = \{0, 1\}$. Määritä kaikki renkaan yksiköt.

Tehtäväsarja IV

Tutustu alirenkaan käsitteeseen.

11. Onko $2\mathbb{Z}$ renkaan $\mathbb{Z}$ alirengas?
12. Osoita, että joukko
$$A = \left\{ \frac{a}{5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$
on renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas.

Tehtäväsarja V

Lue polynomeja käsittelevä luku 21. (Ne kohdat, joissa puhutaan kokonaisalueista, voi toistaiseksi sivuuttaa.)

13. Määritä polynomirenkaan $\mathbb{R}[X]$ alkioiden $P = 6X^2 - 4X + 1$ ja $Q = 2X^3 - X^2 + X$ tulo. Polynomit voidaan tulkita myös renkaan $\mathbb{Z}_4[X]$ alkioiksi. Mikä niiden tuloksi tulee tällöin? Entä silloin, jos polynomit tulkitaan renkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ alkioiksi?
14. Määritä tehtävässä 13 laskemiesi tulopolynomien asteet.

Tehtäväsarja VI

15. Oletetaan, että G on ryhmä ja $g, x \in G$. Osoita, että $o(g) = o(xgx^{-1})$.

    Neuvo: Muista, että alkion kertaluku ei välttämättä ole äärellinen.

Ylimääräinen tehtävä

16. Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmä H. Merkitään $k = [G : H]$ ja oletetaan, että k on äärellinen. Olkoon $g \in G$. Osoita, että $g^m \in H$ jollakin $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$.