Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 7

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: 15.3.2013
Korjausten viimeinen palautuspäivä: 29.3.2013

Tehtävä 16 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

Ryhmällä $\mathbb{Z}_8$ on aliryhmä $H = \{[0]_8, [4]_8\}$. Määritellään joukon $\mathbb{Z}_8$ relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$[a]_8 \sim [b]_8, \quad \text{jos} \quad -[a]_8 + [b]_8 \in H.$$

Kyseessä on ekvivalenssirelaatio samaan tapaan kuin harjoituksen 6 tehtävässä 8.

1. Määritä alkion $[1]_8$ ekvivalenssiluokan alkiot.

2. Määritä kaikkien ekvivalenssiluokkien alkiot. Montako ekvivalenssiluokkia on yhteensä?

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssikirjan lukuihin 10.1, jossa käsitellään aliryhmän sivuluokkia.

3. Tutkitaan ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmää $8\mathbb{Z}$. Määritä sivuluokan $5 + 8\mathbb{Z}$ alkiot.

4. Tutkitaan ryhmän S_3 aliryhmää $B = \{(1), (23)\}$. Määritä sivuluokan $(12)B$ alkiot.

5. Ryhmällä $(\mathbb{R}, +)$ on aliryhmä $\mathbb{Q}$. Ovatko sivuluokat $5 + \mathbb{Q}$ ja $\sqrt{3} + \mathbb{Q}$ samat? Kuinka tehtävän voi ratkaista määrittämättä sivuluokkien alkioita?

6. Määritä sivuluokka $-\frac{3}{4} + \mathbb{Q}$.

Tehtäväsarja III

7. Määritä ryhmän S_3 aliryhmän $B = \{(1), (13)\}$ vasemmat sivuluokat eli määritä joukko S_3/B.

8. Oletetaan, että G on ryhmä ja H sen aliryhmä. Olkoot $a, b \in G$. Täydennä lemman 10.5 todistusta ja todista seuraava väite.

   Jos $aH = bH$, niin $a^{-1}b \in H$.

Tehtäväsarja IV

Tutustu Lagrangen lausetta käsittelevät lukuun 10.3.

9. Ryhmällä $\mathbb{Z}_{16}$ on aliryhmä $H = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli (vasempien) sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat.

10. Mikä on ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmän $10\mathbb{Z}$ indeksi? Voiko sen määrittämiseen käyttää Lagrangen lausetta?

Tehtäväsarja V

11. Mikä on jakojäännös, kun $7^{541} + 2^{1000}$ jaetaan luvulla 8? Kongruensseista on apua.

12. Osoita, että joukossa $\mathbb{Z}_5$ ei voi määritellä laskutoimitusta kaavalla

$$[a]_5 * [b]_5 = [\min\{a, b\}]_5.$$

13.* Voiko joukossa $\mathbb{Z}_n$ määritellä laskutoimituksen kaavalla

$$[a]_n * [b]_n = [a^2 - 5b]_n?$$

Tehtäväsarja VI

14. Määritä kompleksiluvun $z = \sqrt{3}/2 + (1/2)i$ virittämä aliryhmä ryhmässä $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Piirrä aliryhmän alkiot koordinaatistoon. Keksi ainakin kaksi ryhmää, jotka ovat rakenteeltaan samanlaisia kuin $\langle z \rangle$.

    Vihje: Kompleksilukujen eksponenttiesityksestä on apua. Tietoa kompleksiluvuista löytyy kurssikirjan liitteestä.

15. Oletetaan, että G ja H ovat ryhmiä ja $f\colon G \to H$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos H on syklinen, niin myös G on syklinen.

Ylimääräinen tehtävä

Luvussa 6.3 käsitellään useamman alkion virittämiä aliryhmiä.

16. (a) Määritä ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmä $\langle 6, 15 \rangle$.
    (b) Oletetaan, että $m, n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että aliryhmän $\langle m, n \rangle$ eräs virittäjä on $\mathrm{syt}(m, n)$.