

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 22.2.2013 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 22.3.2013 klo 18.00

Tehtävällä 15 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.
Tutustu kirjan lukuun 8, jossa käsitellään syklisiä ryhmiä.

1. Määritä kaikkien ryhmän \mathbb{Z}_6 alkioiden kertaluvut. Mitkä alkioista virittävät ryhmän?

2. Osoita, että matriisiryhmä

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$

on syklinen. (Laskutoimituksena on matriisien kertolasku.)

3.* Oletetaan, että ryhmän G alkion g kertaluku on n . Lemman 6.6¹ mukaan alkion g virittämä aliryhmä on $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$. Kuitenkin aliryhmään $\langle g \rangle$ kuuluvat määritelmän mukaan myös muun muassa alkiot g^{n+1} ja g^{-1} . Mikä edellä luetelluista alkioista on g^{n+1} ? Entä g^{-1} ? Perustele vastauksesi.

Tehtäväsarja I

4. Onko joukko $H = \{\sigma \in S_7 \mid \sigma(1) = 2\}$ ryhmän S_7 aliryhmä?

Tehtäväsarja II

5. Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Osoita, että jäännösluokkaryhmä \mathbb{Z}_n on vaihdannainen.

6. Onko jäännösluokkaryhmä \mathbb{Z}_6 isomorfinen symmetrisen ryhmän S_3 kanssa?

Vihje: Käytä hyväksesi edellistä tehtävää.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssikirjan lukuihin 8.4 ja 8.5, joissa käsitellään syklisten ryhmien aliryhmiä. Erityisesti lauseesta 8.18 on hyötyä.

7. Määritä kaikki ryhmän \mathbb{Z}_{16} aliryhmät.

¹Ensimmäisessä painoksessa lemmän numero on 6.7.

Tehtäväsarja IV

Tutustu lukuun 9, jossa käsitellään ekvivalenssirelaatioita.

Tehtävissä 8–11 käsitellään joukon \mathbb{Q} relaatiota \sim , joka määritellään seuraavasti:

$$x \sim y, \quad \text{jos} \quad -x + y \in \mathbb{Z}.$$

8. Osoita, että kyseessä on ekvivalenssirelaatio.
9. Luettele neljä ekvivalenssiluokan $[1]$ alkioita.
10. Määritä ekvivalenssiluokka $[\frac{1}{2}]$.
11. Päteekö $[1] = [\frac{1}{2}]$? Entä $[\frac{2}{3}] = [-\frac{4}{3}]$? Osaatko ratkaista tehtävän määrittämättä ekvivalenssiluokkien alkioita?

Tehtäväsarja V

12. Olkoon G ryhmä ja g sen alkio. Osoita, että $\langle g \rangle = \langle g^{-1} \rangle$.
Neuvo: Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.
13. Selitä omin sanoin käyttämättä matemaattisia symboleita, mitä edellisessä tehtävässä osoitettiin. Tässä ei ole tarkoitus selittää todistuksen välivaiheita, vaan ainoastaan tulos, jonka todistettiin. Lyhyt vastaus siis riittää! (Tämän tehtävän voi tehdä, vaikka ei olisikaan tehnyt edellistä tehtävää.)

Tehtäväsarja VI

14. Piirrä itsellesi käsitekartta, josta löytyvät ainakin seuraavat sanat: aliryhmä, bijektio, isomorfismi, jäännösluokka, kertaluku, käänteisalkio, laskutoimitus, laskutoimitustaulu, liitännäisyys, monikerta, neutraalialkio, permutaatio, potenssi, ryhmä, sykli, syklinen ryhmä, symmetrinen ryhmä, vaihdannaisuus, vasta-alkio, virittäminen.

Ylimääräinen tehtävä

15. (a) Listaa kaikki ryhmän S_4 alkiot. (Alkiot kannattaa luokitella sen mukaan, millaisia niiden sykliesitykset ovat.)
(b) Kuinka monen ryhmän S_4 alkion kertaluku on kaksi?
(c) Kuinka monta kolmen alkion aliryhmää ryhmässä S_4 on?

Lisähaaste: tee sama ryhmälle S_5 .