Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 15.2.2013 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 15.3.2013 klo 18.00

Tehtävällä 16 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

Tutustu kirjan lukuun 6.1, jossa käsitellään aliryhmän virittämistä.

1. Mitkä seuraavista alkoista ovat ryhmän $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ aliryhmässä $\langle 3 \rangle$?
$$27, \quad 6, \quad \frac{1}{9}, \quad -3$$

2. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmät $\langle 10 \rangle$ ja $\langle -10 \rangle$.

Tässä kohtaa kurssikirjan 1. ja 2. painos poikkeavat hieman toisistaan. Jos omistat 1. painoksen, täytyy sinun ryhtyä tutustumaan lukuun 6.2.

3. Määritä ryhmän K_{15} aliryhmä $\langle 10 \rangle$. Jotta perustelusi on täsmällinen, käytä lemmaa 6.6. (Ensimmäisessä painoksessa lemman numero on 6.7.)

4. Määritä ryhmän S_5 aliryhmä $\langle (1523) \rangle$.

5. Onko ryhmän K_{16} aliryhmä $\{4, 8, 12, 16\}$ syklinen?

6. Onko ryhmän S_5 aliryhmä $\{(1), (25), (34), (25)(34)\}$ syklinen?

Tehtäväsarja II

7. Määritä seuraavien ryhmän S_6 alkioiden kertaluvut
$$(14), \quad (253), \quad (14)(253).$$

8. Tutkitaan korttipakkaa, jossa on kymmenen korttia. Sekoitetaan kortteja niin, että otetaan pakan päältä neljän kortin pino ja laitetaan se pakan alle. Kirjoita sekoitusta vastaava permutaatio syklimuodossa. Selvitä permutaation avulla, kuinka monen sekoituskerran jälkeen ollaan takaisin lähtötilanteessa.

9.* Mikä on ryhmän $K_8 \times K_6$ alkion $a = (2, 3)$ kertaluku? Mitkä ovat aliryhmän $\langle a \rangle$ alkiot? Muista perustella vastauksesi täsmällisesti.

Tehtäväsarja III

Tutustu jäännösluokkan käsitteeseen, joka löytyy luvusta 7.5.

10. (a) Luettele jäännösluokan $[6]_8$ alkiot.
    (b) Kuuluuko -4 jäännösluokkaan $[15]_{11}$?

11. Tutki, ovatko annetut jäännösluokat samat.

    (a) $[-3]_5$ ja $[22]_5$
    (b) $[281]_7$ ja $[-5]_7$

    Miten ongelman voi ratkaista määrittämättä jäännösluokkien alkioita?

12. Jäännösluokkien joukossa $\mathbb{Z}_n$ voi määritellä yhteenlaskun kaavalla $[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

    (a) $[3]_5 + [4]_5 = [1]_5$
    (b) $[3]_6 + [4]_6 = [1]_6$
    (c) $[2]_4 + [2]_4 + [2]_4 = [2]_4$
    (d) $7 \cdot [3]_7 = [0]_7$

    Jäännösluokkien laskutoimitusta käsitellään tarkemmin luvussa 8.1.

Tehtäväsarja IV

13. Jos ryhmien välillä on isomorfismi, ovat ryhmät rakenteeltaan samanlaiset. Isomorfismin määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä omin sanoin, miten isomorfismin määritelmässä olevat kaksi ehtoa liittyvät edellä annettuun luonnehdintaan.

14.* Merkitään $H = \{10^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Harjoituksessa 3 osoitettiin, että $(H, \cdot)$ on ryhmän $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ aliryhmä. Osoita, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(H, \cdot)$ ovat isomorfiset.

    Vihje: Mieti, mitä kokonaislukuja ryhmän H alkiot voisivat vastata, ja määrittele sen perusteella kuvaus joukosta $\mathbb{Z}$ joukkoon H.

15. Olkoon $f\colon G \to H$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos G on vaihdannainen ryhmä, myös H on vaihdannainen ryhmä.

Ylimääräinen tehtävä

16. Osoita, että ryhmät $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ eivät ole isomorfiset.