

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 8.2.2013 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 22.2.2013 klo 18.00

Tehtävä 16 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tähdet-
tömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

1. Määritä ryhmän S_5 permutaatioiden $(13)(254)$ ja (34) käänteisalkiot.
2. Ratkaise yhtälö $(13)(254) \cdot x \cdot (34) = (123)$ ryhmässä S_5 .

Tehtäväsarja II

Jatkossa tulemme tarvitsemaan lukuteorian tietoja. Tutustu lukuihin 7.1 ja 7.2 joissa
käsitellään jaollisuutta ja suurinta yhteistä tekijää.

3. Mitkä seuraavista pitävät paikkansa?

$$8 \mid -64, \quad 4 \mid 11, \quad 0 \mid 5$$

4. Oletetaan, että $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Osoita, että jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid (b + c)$.
5. Laske
 - a) $\text{sy}(35, 14)$
 - b) $\text{sy}(12, 3)$
 - c) $\text{sy}(5, 12)$.

Tutustu lukuun 7.5, jossa esitellään kongruenssin käsite.

6. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät?

$$\text{a) } 8 \equiv 50 \pmod{6} \quad \text{b) } 13 \equiv 4 \pmod{11} \quad \text{c) } -4 \equiv 11 \pmod{5}$$

Tehtäväsarja III

Tutustu kirjan lukuihin 5.1 ja 5.2, jotka käsittelevät ryhmien kertotauluja ja isomorfi-
suutta.

7. Kirjoita kellotauluryhmän K_4 yhteenlaskutaulu. Tiedetään, että neljän alkion ryh-
miä on vain kaksi erilaista. Kumpi niistä K_4 on, Kleinin neliryhmä vai neljän alkion
syklinen ryhmä?
- 8.* Kirjoita tuloryhmän $K_2 \times K_2$ yhteenlaskutaulu. Tässä K_2 on kellotauluryhmä, ja
tuloryhmän laskutoimitus määritellään komponenteittain:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d) \quad \text{kaikilla } a, b, c, d \in K_2.$$

9. Onko $K_2 \times K_2$ Kleinin neliryhmä vai neljän alkion syklinen ryhmä?

Tehtäväsarja IV

Tutustu kirjan lukuun 5.3, jossa annetaan varsinainen määritelmä isomorfisuudelle.

10. (a) Osoita, että kuvaus $f: \mathbb{Z} \rightarrow 10\mathbb{Z}$, $f(a) = 10a$ on bijektio.
(b) Osoita, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(10\mathbb{Z}, +)$ ovat isomorfiset.
11. (a) Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Laske matriisien $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tulo. Matriisikertolaskusta voit lukea kurssikirjan liitteestä.
(b) Tarkastellaan kääntyvien 2×2 -matriisien ryhmää $GL_2(\mathbb{R})$. Laskutoimituksena on matriisien kertolasku. Tällä ryhmällä on aliryhmä

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Näytä, että kuvaus $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto a$ on ryhmäisomorfismi. (Ryhmän \mathbb{R} laskutoimitus on luonnollisesti yhteenlasku.)

Tehtäväsarja V

12. Etsi jokin ryhmän S_5 aito aliryhmä, joka sisältää alkion (254).
Vihje: Jos aliryhmässä on alkio (254), mitä muita alkioita siellä on oltava? Tämän perusteella voit arvata, mikä sopiva aliryhmä voisi olla. Osoita vielä lopuksi, että löytämäsi joukko tosiaan on aliryhmä.
13. Etsi jokin ryhmän \mathbb{Z} aito aliryhmä, joka sisältää alkiot 10 ja 25.
14. Onko olemassa ryhmän \mathbb{Z} aitoa aliryhmää, joka sisältää alkion 1?

Tehtäväsarja VI

15. Olkoon G ryhmä. Osoita, että joukko

$$Z = \{g \in G \mid xg = gx \text{ kaikilla } x \in G\}$$

on ryhmän G aliryhmä.¹

Ylimääräinen tehtävä

16. Olkoon G vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K . Osoita, että aliryhmien tulo $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ on ryhmän G aliryhmä. Anna esimerkki ryhmästä G ja sen aliryhmistä H ja K , joiden tulo HK ei ole aliryhmä.

Kartuta matemaattista sivistystäsi

17. Katso tv-sarja Futuraman jakso The Prisoner of Benda (tuotantokausi 6, jakso 10). Tästä tehtävästä ei jaeta lisäpisteitä.

¹Tätä aliryhmää kutsutaan ryhmän G keskuukseksi.