

## Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2013

### Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 1.2.2013 klo 18.00

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 15.2.2013 klo 18.00

Tehtävä 16 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

#### Tehtäväsarja I

1. Onko  $(K_{12}, \oplus)$  ryhmän  $(\mathbb{Z}, +)$  aliryhmä?
2. Etsi neljä kellotauluryhmän  $K_6$  aliryhmää.
- 3.\* Onko  $\{10^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  ryhmän  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  aliryhmä?

#### Tehtäväsarja II

Lue kirjasta kappale 4.1, jossa käsitellään permutaatioita. Seuraavissa tehtävissä tutkitaan permutaatioita

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Piirrä kuvat permutaatioista  $\sigma$ ,  $\tau$  ja  $\rho$ . Voit valita mielestäsi parhaan tavan havainnollistaa permutaatiota.

Lue sitten kappale 4.2, jossa käsitellään permutaatioiden tuloa.

5. Laske tulot  $\sigma\tau$ ,  $\tau\sigma$  ja  $\sigma\rho$ .

Lue vielä kappaleesta 4.3 permutaation radoista.

6. Määritä permutaatioiden  $\sigma$ ,  $\tau$  ja  $\rho$  radat. Kuvista on apua.

#### Tehtäväsarja III

Kirjan luvussa 4.3 kerrotaan permutaation sykliäisyyksestä.

7. Seuraavassa on annettu permutaatioiden sykliäisyyksiä. Piirrä permutaatioista kuvat, joista näkyy, miten permutaatio kuvaa määrittelyjoukon alkioita.

- (a) ryhmän  $S_4$  alkio (1324)
- (b) ryhmän  $S_6$  alkio (1324)
- (c) ryhmän  $S_5$  alkio (14)(253)

8. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

- (a) Ryhmän  $S_6$  alkiot  $(16)(35)$  ja  $(35)(16)$  ovat samat.
- (b) Ryhmän  $S_4$  alkiot  $(134)$  ja  $(143)$  ovat samat.
- (c) Ryhmän  $S_6$  alkiot  $(236)$  ja  $(362)(4)(5)$  ovat samat.

#### Tehtäväsarja IV

9.\* Määritellään

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Kirjoita permutaatioiden  $\alpha$  ja  $\beta$  sykliesitykset. Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

- 10.\* Laske ryhmässä  $S_5$  tulot  $(132) \cdot (15)$  ja  $(125)(34) \cdot (25)(34)$ . Anna vastaus syklimuodossa. Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.
11. Määritä ryhmän  $S_5$  alkion  $\alpha = (1453)$  käänteisalkio.

#### Tehtäväsarja V

12. Ryhmällä  $S_4$  on aliryhmä  $H = \{(1), (134), (143)\}$ . Kirjoita  $H$ :n kertotaulu.
13. Kirjoita kellotauluryhmän  $K_3$  yhteenlaskutaulu. Ryhmä  $K_3$  ja edellisen tehtävän ryhmä  $H$  ovat käytännössä samanlaiset. Alkioita merkitään vain erilaisilla symboleilla. Järjestä ryhmän  $K_3$  yhteenlaskutaulu niin, että se näyttää samalta kuin  $H$ :n kertotaulu.

#### Tehtäväsarja VI

Oletetaan, että  $(G, +)$  on vaihdannainen ryhmä, jolla on neutraalialkio  $e$ .

14. Osoita, että  $3(a + b) = 3a + 3b$  kaikilla  $a, b \in G$ .
15. Osoita, että joukko

$$H = \{a \in G \mid 3a = e\}$$

on ryhmän  $G$  aliryhmä.

#### Ylimääräinen tehtävä

16. Lauseessa 3.17 on osoitettu, että kahden aliryhmän leikkaus on aina aliryhmä. Milloin kahden aliryhmän yhdiste on aliryhmä?