Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 25.1.2013 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 8.2.2013 klo 18.00

Tehtävä 16 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

Tehtävä I

1. Voiko joukossa $\mathbb{N}$ määritellä laskutoimituksen $*$ kaavalla
$$a * b = a^2 - 2b + 5 \quad \text{kaikilla } a, b \in \mathbb{N}?$$

2. Voiko joukossa $\mathbb{N}$ määritellä laskutoimituksen $*$ kaavalla
$$a * b = 40 \quad \text{kaikilla } a, b \in \mathbb{N}?$$

3. Osoita, että rationaalilukujen joukossa ei voi määritellä laskutoimitusta kaavalla
$$\frac{m}{n} * \frac{k}{l} = \frac{m+k}{n^2+l^2}.$$
Tässä $m, k \in \mathbb{Z}$ ja $n, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4. Tutkitaan kokonaislukujen laskutoimitusta, joka määritellään kaavalla $x * y = x + 2y$. Onko laskutoimituksella neutraalialkiota?

Tehtävä II

Tutustu kurssikirjan lukuun 3, joka käsittelee ryhmiä.

5. Määritellään joukkossa $S = \{X, Y, Z\}$ laskutoimitus $\triangle$ seuraavan laskutoimitustaulun avulla:

$\triangle$	X	Y	Z
X	X	Z	Y
Y	Y	X	Z
Z	Z	Y	Y

Onko $(S, \triangle)$ ryhmä?

6. Suljetulla välillä $I = [-2, 2]$ voidaan määritellä laskutoimitus $*$ kaavalla
$$a * b = \max\{a, b\}.$$
Onko $(I, *)$ ryhmä?

7.* Määritellään kokonaislukujen joukossa laskutoimitus kaavalla $x * y = x + y - 5$. Osoita, että $(\mathbb{Z}, *)$ on ryhmä.

Tehtävä III

Tutustu kurssikirjan lukuun 3.6, joka käsittelee aliryhmiä.

8. Oletetaan, että H on kellotauluryhmän K_{20} aliryhmä, jossa on alkio 8. Osoita, että seuraavat alkiot kuuluvat aliryhmään H:
$$16,\ 12,\ 4.$$
9. Osoita, että $A = \{5, 10, 15\}$ on kellotauluryhmän K_{15} aliryhmä. Apuna kannattaa käyttää joukon A laskutoimitustaulua.
10. Onko $H = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q}, +)$ aliryhmä?
11. Onko $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ryhmän $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?

Tehtävä IV

12.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, jolla on seuraava laskutoimitustaulu:

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a	f	d	a	e	b	c
b	e	c	b	f	a	d
c	a	b	c	d	e	f
d	b	a	d	c	f	e
e	d	f	e	a	c	b
f	c	e	f	b	d	a

Määritä alkiot b^3 ja f^{-4}. (Pelkkä vastaus ei riitä. Muista perustelut. Potenssimerkintää käsitellään luvussa 3.3.)

13. Olkoon G ryhmä, jossa on alkiot a ja b. Määritä yhtälön $ax^2b = xb$ ratkaisut eli etsi kaikki sellaiset alkiot $x \in G$, jotka toteuttavat yhtälön. (Muista, että ryhmän laskutoimitus ei välttämättä ole vaihdannainen. Et siis voi käyttää vaihdannaisuutta hyväksesi.)
14. Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että
$$(xy)^2 = x^2y^2$$
kaikilla $x, y \in G$. Osoita, että ryhmä G on vaihdannainen.
15. Jatkoa edelliseen tehtävään. Oletetaankin sitten, että ryhmän G laskutoimitusta merkitään yhteenlaskumerkillä. Esitä tehtävä ratkaisuineen käyttämällä kertolaskumerkinnän sijasta yhteenlaskumerkintää.

Ylimääräinen tehtävä

16. Kurssikirjassa on osoitettu, että ryhmän laskutoimitustaulussa kukin alkio esiintyy jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran.

Oletetaan, että äärellisessä epätyhjässä joukossa S on määritelty laskutoimitus $*$. Jos kukin joukon alkio esiintyy laskutoimitustaulun jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran, onko $(S, *)$ välttämättä ryhmä?