Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 12

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 26.4.2013 klo 18.00

Tehtävillä 15 ja 16 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

Tutkitaan ryhmän S_8 aliryhmää $H = \{(1), (13), (14), (34), (134), (143)\}$.

1. Miten voisit mahdollisimman helposti tutkia, ovatko sivuluokat $(27)H$ ja $(274)H$ samat?

2. Osoita normaalisuuskriteerin avulla, että H ei ole ryhmän S_8 normaali aliryhmä.

Tehtäväsarja II

Harjoituksen 8 tehtäväsarjassa I tutkittiin ryhmän $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aliryhmää

$$H = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Silloin todettiin, että sivuluokkien joukko $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/H$ koostuu suoran H kanssa yhdensuuntaisista suorista.

3. Onko sivuluokkien joukko $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/H$ on ryhmä? Osaatko perustella vastauksesi käymättä läpi ryhmän aksioomia?

4. Mitkä seuraavista sivuluokista ovat samoja?

$$(1, 1) + H + (8, 5) + H, \quad -((-1, 1) + H), \quad 4 \cdot ((2, 1) + H)$$

5. Osoita, että aliryhmän H indeksi on ääretön.

Tehtäväsarja III

6. Millainen isomorfismi homomorfismista $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a, b) = b$ saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla?

7. Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että ryhmä $4\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}_5$ kanssa.

   Neuvo: Apuna on käytettävä sopivaa kuvausta $f\colon 4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$.

Tehtäväsarja IV

Mitkä seuraavista polynomeista ovat jaottomia?

8. Tutki, onko polynomi $X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$ jaoton. Jos polynomi ei ole jaoton, ilmaise se kahden ensimmäisen asteen polynomin tulona.
9. Onko polynomi $X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ jaoton?
10. Onko renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ polynomi $X^3 + 2X + 2$ jaoton?

Tehtäväsarja V

11. Tutkitaan Boolen rengasta $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, missä $X = \{0, 1\}$. (Boolen renkaat on esitelty esimerkissä 12.6.) Onko rengas $\mathcal{P}(X)$ kokonaisalue?
12. Onko polynomirengas $\mathbb{Z}_5[X]$ kunta?
13. Oletetaan, että R on rengas ja $a \in R$. Osoita, ilman renkaan laskusääntöjä että $(-1_R)a = -a$.

Tehtäväsarja VI

14. Laadi käsitekartta, jossa ovat ainakin alla luetellut käsitteet. Selitä kartassasi käsitteiden väliset yhteydet.

    alirengas, edustaja, ekvivalenssiluokka, ekvivalenssirelaatio, homomorfismi, ideaali, injektio, isomorfismi, juuri, jäännösluokka, kokonaisalue, kunta, kuva, Lagrangen lause, normaali aliryhmä, ositus, polynomi, polynomikuvaus, polynomin jaollisuus, rengas, sivuluokka, tekijäryhmä, tekijärengas, ydin, yksikkö

Ylimääräisiä tehtäviä

Tehtävillä 15–16 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

15. Oletetaan, että $G = \langle g \rangle$ on äärellinen syklinen ryhmä, jossa on n alkiota. Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että $\mathbb{Z}_n \cong G$.

Seuraavassa tehtävässä todistetaan niin kutsuttu Cayleyn lause. Se osoittaa, että jokainen ryhmä voidaan tulkita jonkin symmetrisen ryhmän aliryhmäksi.

16. Oletetaan, että G on ryhmä. Tutkitaan ryhmää S_G, joka koostuu kaikista ryhmän G alkioiden permutaatiosta.
    (a) Oletetaan, että $g \in G$. Osoita, että kuvaus $f_g\colon G \to G$, $f_g(x) = gx$ on bijektio. Toisin sanoen $f_g \in S_G$.
    (b) Edellisen kohdan nojalla voidaan määritellä kuvaus $\varphi\colon G \to S_G$ kaavalla $\varphi(g) = f_g$. Osoita, että φ on ryhmähomomorfismi.
    (c) Osoita, että φ on injektio. Päättele tämän avulla, että ryhmällä S_G on aliryhmä, joka on isomorfinen ryhmän G kanssa.