

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 11

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 19.4.2013 klo 18.00
 Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 3.5.2013 klo 18.00

Tehtävällä 16 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

Tehtävissä 1–3 tutkitaan kvaternioryhmää¹ $\mathbb{H} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, jonka kertotaulu on esitetty ohessa.

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

- Osoita, että $N = \{1, -1\}$ on ryhmän \mathbb{H} normaali aliryhmä. Sivuluokkien joukko \mathbb{H}/N on siis ryhmä.
- * Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

$$\text{a) } kN \cdot jN = iN \quad \text{b) } (iN)^{-1} = kN$$

Perustele vastauksesi huolellisesti.

- Tekijäryhmässä \mathbb{H}/N on neljä alkioita. Onko se syklinen ryhmä vai Kleinin neli-ryhmä?
- * Määritä alkion $\frac{2}{3} + \mathbb{Z}$ kertaluku tekijäryhmässä \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Tehtäväsarja II

Tutustu lukuun 22, jossa käsitellään polynomien jaollisuutta.

- Määritä polynomin $X^2 - X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$ juuret.
- Etsi jokin ensimmäistä astetta oleva polynomi, joka jakaa edellisen tehtävän polynomin.

¹Kvaterniot löysi William Rowan Hamilton vuonna 1843.

Tehtäväsarja III

Tutustu lukuun 20, jossa käsitellään ryhmien homomorfialausetta.

Tehtävissä 7–11 tutkitaan kuvausta $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$, $f(a) = [3a]_{15}$.

7. Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.
- 8.* Mikä on homomorfismin f ydin? Perustele vastauksesi huolellisesti.
9. Mikä on homomorfismin f kuva?
10. Maalijoukolla on aliryhmä

$$H = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}.$$

Päättele ryhmien homomorfialauseen avulla, että ryhmä $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän H kanssa.

11. Mille alkiolle edellisen tehtävän isomorfismi kuvaa sivuluokan $3 + 5\mathbb{Z}$? Entä sivuluokan $-11 + 5\mathbb{Z}$?

Tehtäväsarja IV

12. Olkoon $f: G \rightarrow H$ ryhmähomomorfismi. Tutkitaan ytimen $\text{Ker } f$ sivuluokkia. Osoita, että samassa sivuluokissa olevilla alkiolla on sama kuva-alkio.
13. Määritä kaikki homomorfismit ryhmältä \mathbb{Z}_4 ryhmälle S_3 .

Tehtäväsarja V

Tutustu lukuun 16, jossa käsitellään ideaaleja ja tekijärenkaita

14. Osoita, että $I = \{[0]_9, [3]_9, [6]_9\}$ on renkaan \mathbb{Z}_9 ideaali.
15. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä tekijärenkaan \mathbb{Z}_9/I yhteenlaskutaulu ja kertotaulu.

Ylimääräinen tehtävä

16. Oletetaan, että R on ääretön kunta. Osoita, että kaksi eri polynomirenkaan $R[X]$ polynomia ei voi määrittää samaa polynomikuvausta. Polynomit voidaan siis samastaa polynomikuvausten kanssa, jos kerroinkunta on ääretön.