Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 10

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 12.4.2013 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 26.4.2013 klo 18.00

Tehtävällä 18 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

1. Tutkitaan renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ osajoukkoa $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$. Osoita, että $(R, +, \cdot)$ on rengas. Miksi se ei ole renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ alirengas?

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Onko R kunta?

3.* Osoita, että jokaisessa kokonaisalueessa D pätee niin sanottu *supistamissääntö*: jos $ab = ac$ ja $a \neq 0$ joillakin $a, b, c \in D$, niin $b = c$.

Tehtäväsarja II

Tutustu lukuihin 15.3 ja 15.4, joissa käsitellään tekijäryhmiä ja normaaleja aliryhmiä.

Tehtävissä 4–6 tarkastellaan ryhmää $\mathbb{Z}_{10}$ ja sen normaalia aliryhmää $H = \langle [5]_{10} \rangle$.

4. Määritä sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}_{10}/H$.

5. Koska aliryhmä H on normaali, sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}_{10}/H$ on ryhmä. Kirjoita tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{10}/H$ yhteenlaskutaulu.

6. Järjestä ryhmän $\mathbb{Z}_{10}$ yhteenlaskutaulussa alkiot aliryhmän H sivuluokkien mukaan. Miten taulussa näkyy tekijäryhmä $\mathbb{Z}_{10}/H$?

Neliön symmetriaryhmä D_4 koostuu neliön symmetrioista, joita ovat kierrot ja peilaukset. Ryhmän kertotaulu on esitety ohessa. Kiertoja on merkitty symbolilla ρ ja peilauksia symbolilla σ. Voit halutessasi lukea neliön symmetriaryhmästä lisää luvusta 11.3.

$\cdot$	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
ρ_3	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1
σ_4	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1

7. Osoita, että edellä esitellyllä neliön symmetriaryhmällä D_4 on normaali aliryhmä $R_2 = \{1, \rho_2\}$.
8. Määritä tekijäryhmän D_4/R_2 kertotaulu.
9. Tutkitaan tekijäryhmää $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Osoita, että alkiolla $1/2+\mathbb{Z}$ on tekijäryhmässä vasta-alkiot $-1/2+\mathbb{Z}$ ja $5/2+\mathbb{Z}$. Miksei tämä ole ristiriidassa sen kanssa, että ryhmän alkiolla voi olla vain yksi käänteisalkio?
10.* Tutkitaan ryhmän S_4 aliryhmää $H = \{(1), (123), (132)\}$. Osoita vastaesimerkillä, että joukossa S_4/H ei voi määritellä laskutoimitusta kaavalla

$$\alpha H \cdot \beta H = \alpha\beta H.$$

Miten voit tämän perusteella päätellä, että H ei ole normaali aliryhmä?

Tehtäväsarja III

Tutustu kirjan lukuun 18, jossa käsitellään ryhmähomomorfismeja.

Tehtävissä 11–13 tutkitaan seuraavia kuvauksia:

$$\begin{aligned} &g\colon (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad g(x) = 3x \\ &h\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad h(n) = (-1)^n \\ &f\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad f(a,b) = (a,0) \end{aligned}$$

11. Mitkä kuvauksista ovat ryhmähomomorfismeja?
12. Määritä ryhmähomomorfismien ytimet.
13. Mitä voit päätellä ytimien perusteella kuvausten injektiivisyydestä?

Tutustu kirjan lukuun 19, jossa käsitellään rengashomomorfismeja.

14. Osoita, että kuvaus $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$, $p(a) = [a]_6$ on rengashomomorfismi.

Tehtäväsarja IV

15.* Onko polynomirengas $\mathbb{Z}_4[X]$ kokonaisalue?
16. Osoita, että kahden alirenkaan leikkaus on alirengas.

Tehtäväsarja V

17. Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä. Osoita, että tekijäryhmän G/N alkiolle gN pätee $(gN)^k = g^kN$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

    Vihje: Induktiotodistus.

Ylimääräinen tehtävä

18. Olkoon G ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Oletetaan lisäksi, että $[G : N] = k$. Osoita, että $g^k \in N$ kaikilla $g \in G$.