

Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 18.1.2013 klo 18.00

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 1.2.2013 klo 18.00

Tehtävä 16 on hieman haastavampi, ja voit korvata sillä minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

Tehtäväsarja I

Joukon S *laskutoimitus* $*$ on sääntö, joka liittyy jokaiseen joukon S alkiopariin (x, y) jonkin yksikäsitteisen kolmannen alkion joukosta S . Tätä alkioita kutsutaan laskutoimituksen tulokseksi ja merkitään $x * y$.

Määritellään joukolle $K_{12} = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ laskutoimitus \oplus , jota kutsutaan kellotaulusummaksi: jos $n, m \in K_{12}$, niin $n \oplus m$ on se kellonaika, joka saadaan, kun kellonaikaan n lisätään m tuntia. Esimerkiksi $2 \oplus 6 = 8$ ja $9 \oplus 4 = 1$.

1. Määritä kellonajat $2 \oplus 9$, $3 \oplus 12$ ja $10 \oplus 6$.
2. Kuvitellaan kellotaulu, jossa on 13 tuntia, ja tarkastellaan kellotaulusummaa joukossa $K_{13} = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$. Mitä saat nyt tulokseksi edellisen tehtävän laskuista?

Tehtäväsarja II

Äärellisessä joukossa määritellyn laskutoimituksen kaikki mahdolliset tulokset voidaan kirjoittaa *laskutoimitustauluun*. Taulun sarakkeet ja rivit nimetään joukon S alkiolla, ja taulukon riville x sarakkeeseen y kirjoitetaan tulos $x * y$.

Oheinen laskutoimitustaulu määrittelee erään hedelmien joukon laskutoimituksen. Kutsutaan tätä laskutoimitusta hedelmäkertolaskuksi.

\otimes	omena	banaani	päärynä	luumu
omena	luumu	omena	päärynä	banaani
banaani	omena	banaani	päärynä	luumu
päärynä	päärynä	päärynä	luumu	omena
luumu	banaani	luumu	omena	luumu

3. Määritä seuraavat hedelmät: päärynä \otimes banaani, omena \otimes luumu, päärynä \otimes omena.

Tehtäväsarja III

Joukon S laskutoimitus $*$ on

- *liitännäinen*, jos $x * (y * z) = (x * y) * z$ kaikilla $x, y, z \in S$
- *vaihdannainen*, jos $x * y = y * x$ kaikilla $x, y \in S$.

4. Tehtävän 3 hedelmäkertolasku on vaihdannainen. Miten se näkyy laskutoimitustaulussa?

5. Osoita, että tehtävän 3 hedelmäkertolasku ei ole liitännäinen.
6. Määritellään reaalityyppisille laskutoimitus kaavalla $x * y = 2xy$. Onko laskutoimitus liitännäinen? Entä vaihdannainen?
- 7.* Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus kaavalla $x * y = -x + xy + y$. Onko laskutoimitus liitännäinen?

Neuvo: Muista, että tämän tyyppiset väitteet osoitetaan epätodeksi keksimällä vastaesimerkki.

Tehtäväsarja IV

Olkoon $*$ joukossa S määritelty laskutoimitus. Joukon S alkioita e kutsutaan *neutraalialkioksi*, jos

$$e * x = x \quad \text{ja} \quad x * e = x \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Oletetaan, että laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio e . Olkoon $x \in S$. Alkiota x' kutsutaan alkion x *käänteisalkioksi*, jos

$$x * x' = e \quad \text{ja} \quad x' * x = e.$$

8. Määritä joukon K_{12} kellotaulusumman neutraalialkio.
9. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot?
10. Mikä on neutraalialkio ja mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot, jos tutkitaankin kellotaulusummaa joukossa $K_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
11. Tehtävän 3 hedelmäkertolaskulla on neutraalialkio. Mikä se on? Millä hedelmillä on käänteishedelmät?
12. Olkoon X joukko. Yhdisteoperaatio \cup on potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ laskutoimitus. Onko sillä neutraalialkiota?
13. Myös leikkausoperaatio \cap on potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ laskutoimitus. Onko sillä neutraalialkiota?

Tehtäväsarja V

- 14.* Olkoon $*$ joukon S liitännäinen laskutoimitus. Oletetaan, että joukon S alkiolla x ja y on käänteisalkiot. Osoita, että alkiolla $x * y$ on käänteisalkio.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

15. Oletetaan, että $*$ on joukossa S määritelty laskutoimitus. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.
 - (a) Jokaisella $a \in S$ pätee $(a * a) * a = a * (a * a)$.
 - (b) Joukon S alkiolla voi olla useita käänteisalkioita laskutoimituksen $*$ suhteen.