

Algebra I

20.2.2013

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Kurssikoe järjestetään ke 27.2. klo 12.00–15.00.
- Koealue on luvut 1–8 muutamien poikkeuksin. (Katso kurssisivu.)
Taulukkokirjaa tai laskinta ei saa käyttää.
- Jos et pääse kurssikokeeseen ja haluat osallistua korvaavaan kokeeseen, ota yhteyttä luennoitsijaan mahdollisimman pian.
- Voit käydä kommentoimassa harjoituksen 5 tehtäviä osoitteessa <http://aktivator.jamo.fi> .
 - 1 Liian helppoa.
 - 2 Helppoa, muttei liian helppoa.
 - 3 Sopivaa.
 - 4 Työlästä, muttei liian työlästä.
 - 5 Liian työlästä

Vinkkejä kokeeseen opiskeluun

- Käy läpi harjoitustehtävät. Älä katso mallivastauksia muuten kuin tarkistaaksesi, menikö tehtävä oikein.
- Lue koealue ja yritä keskittyä olennaiseen. Tässä auttaa kunkin kappaleen lopussa oleva tiivistelmä. Myös harjoitustehtävät kertovat, mikä kurssilla on ollut oleellista.
- Piirrä käsitekartta kurssin asioista. Tämän viikon harjoitustehtävästä on apua.
- Älä jätä kaikkea viimeiseen iltaan. Oppiminen on tehokkaampaa, jos sen hajauttaa pitemmälle aikavälille.
- Pyydä apua ohjaajilta. (Koeviikolla on ohjauksessa poikkeusaikataulu. Yleisohjaus eli laskupaja toimii normaalisti.)

Jäännösluokkatehtävä

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

- ① $5 \in [11]_3$
- ② $[20]_8 = [-12]_8$

Jännösluokkatehtävä

- 1 Vain väite 1 on totta.
- 2 Vain väite 2 on totta.
- 3 Kumpikaan edellisistä vaihtoehdoista ei ole oikea.
- 4 En tiedä.

<http://aktivator.jamo.fi>

Kongruenssin ominaisuuksia

Lemma 1

Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ja olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin seuraavat väitteet pätevät:

- a) $a \equiv a \pmod{n}$.
- b) *Jos $a \equiv b \pmod{n}$, niin $b \equiv a \pmod{n}$.*
- c) *Jos $a \equiv b \pmod{n}$ ja $b \equiv c \pmod{n}$, niin $a \equiv c \pmod{n}$.*

Kongruenssin ominaisuuksia

Lemma 1

Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ja olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin seuraavat väitteet pätevät:

- a) $a \equiv a \pmod{n}$.
- b) Jos $a \equiv b \pmod{n}$, niin $b \equiv a \pmod{n}$.
- c) Jos $a \equiv b \pmod{n}$ ja $b \equiv c \pmod{n}$, niin $a \equiv c \pmod{n}$.

- Kongruenssi on ekvivalenssirelaatio.
- Jäännösluokat ovat relaation ekvivalenssiluokkia.

Jäännösluokkien yhteenlasku

Lause

Jäännösluokkien joukossa \mathbb{Z}_n voidaan määritellä yhteenlasku kaavalla

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n.$$

Millaisia laskutoimituksia voi määritellä?

Voiko jäännösluokkien joukossa \mathbb{Z}_4 määritellä laskutoimituksen kaavalla

$$[a]_4 * [b]_4 = [|a| + 2b]_4?$$

Millaisia laskutoimituksia voi määritellä?

Voiko jäännösluokkien joukossa \mathbb{Z}_4 määritellä laskutoimituksen kaavalla

$$[a]_4 * [b]_4 = [|a| + 2b]_4?$$

Esimerkiksi

$$[3]_4 * [1]_4 = [|3| + 2 \cdot 1] = [5]_4 = [1]_4.$$

Kongruenssin laskusääntöjä

Lause

Oletetaan, että $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Jos $a \equiv b \pmod{n}$ ja $c \equiv d \pmod{n}$, niin

$$a + c \equiv b + d \pmod{n} \quad \text{ja} \quad ac \equiv bd \pmod{n}.$$

Syklinen ryhmä

Määritelmä

Ryhmä G on syklinen, jos sen virittää yksi alkio eli $G = \langle g \rangle$ jollakin $g \in G$.

Syklinen ryhmä

Määritelmä

Ryhmä G on syklinen, jos sen virittää yksi alkio eli $G = \langle g \rangle$ jollakin $g \in G$.

- Esimerkiksi ryhmä \mathbb{Z} on syklinen, sillä sen virittää alkio 1.
- Esimerkiksi ryhmä \mathbb{Z}_5 on syklinen, sillä sen virittää alkio $[1]_5$.

Syklisen ryhmien aliryhmät

Lause

Syklisen ryhmän aliryhmät ovat syklisiä.

Esimerkki

Määritetään ryhmän $\mathbb{Z}_6 = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$ aliryhmät.

Esimerkki

Määritetään ryhmän $\mathbb{Z}_6 = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$ aliryhmät.

Harjoitustehtävässä etsittiin ryhmän K_6 aliryhmiä:

$$\{6\}, \quad \{3, 6\}, \quad \{2, 4, 6\}, \quad K_6$$

Muutetaan tulos jäännösluokkien kielelle.

Äärellisten syklisten ryhmien aliryhmät

Äärellisen syklisen ryhmän aliryhmät saadaan kertaluvun tekijöistä.

Lause

Olkoon $G = \langle g \rangle$ syklinen ryhmä, jonka kertaluku on $n \in \mathbb{N}$. Sen aliryhmät ovat ryhmät $\langle g^d \rangle$, missä d on luvun n positiivinen tekijä.

Samaa kertalukua olevat sykliset ryhmät ovat isomorfisia

Lause

- Jos syklisen ryhmän kertaluku on n , se on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z}_n kanssa.
- Jos syklinen ryhmä on ääretön, se on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa.

Kertalukutehtävä

Mitkä seuraavista väitteistä ovat totta?

Oletetaan, että G on ryhmä.

- 1 Alkion $g \in G$ kertaluku on pienin positiivinen kokonaisluku n , jolle pätee $g^n = e$.
- 2 Jos $g^n = e$, niin alkion g kertaluku on n .
- 3 Alkion $g \in G$ kertaluku on aliryhmän $\langle g \rangle$ kertaluku.
- 4 Alkion $g \in G$ kertaluku on aliryhmän $\langle g \rangle$ alkioiden lukumäärä.

Tehtävä

- 1 Ainoastaan väite 2 on totta.
- 2 Ainoastaan väite 4 on totta.
- 3 Kaikki muut ovat totta paitsi väite 2.
- 4 Kaikki väitteet pitävät paikkansa.
- 5 Jokin muu vaihtoehto.
- 6 En tiedä.

<http://aktivator.jamo.fi>

Vastaus

Väitteet 3 ja 4 ovat totta, muut eivät.

Kertaluku

Määritelmä

Olkoon G ryhmä. Alkion $g \in G$ kertaluku $o(g)$ on sen virittämän aliryhmän $\langle g \rangle$ kertaluku.

Lause

Olkoon G ryhmä ja g jokin sen alkio. Alkion g kertaluku on pienin positiivinen kokonaisluku n , jolla pätee $g^n = e$. Jos tällaista lukua ei löydy, kertaluku on ääretön.

Permutaatiotehtävä 1

Mikä on permutaation $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ kertaluku?

- ① Kertaluku on lukujen 1 ja 4 välissä.
- ② Kertaluku on lukujen 5 ja 10 välissä.
- ③ Kumpikaan edellisistä vaihtoehdoista ei ole oikea.
- ④ Osaisin määrittää kertaluvun, mutta aika ei riitä laskemiseen.
- ⑤ En tiedä.

<http://aktivator.jamo.fi>

Permutaatiotehtävä 2

Mikä on permutaation $\beta = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$ kertaluku?

- ① Kertaluku on 10.
- ② Kertaluku on 24.
- ③ Kumpikaan edellisistä vaihtoehdoista ei ole oikea.
- ④ Osaisin määrittää kertaluvun, mutta aika ei riitä laskemiseen.
- ⑤ En tiedä.

<http://aktivator.jamo.fi>

Permutaatiotehtävä 2

Mikä on permutaation $\beta = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$ kertaluku?

- 1 Kertaluku on 10.
- 2 Kertaluku on 24.
- 3 Kumpikaan edellisistä vaihtoehdoista ei ole oikea.
- 4 Osaisin määrittää kertaluvun, mutta aika ei riitä laskemiseen.
- 5 En tiedä.

<http://aktivator.jamo.fi>

Miten permutaation kertaluku määräytyy yleisessä tapauksessa?