

# Algebra I

23.4.2013

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Johanna Rämö

## Käytännön asioita

- Kurssikoe järjestetään ke 8.5. klo 12.00-15.00. Jos et jostakin painavasta syystä pääse kurssikokeeseen, kerro siitä mahdollisimman pian.
- Koealue löytyy kurssisivulta. Vinkki: Harjoituksista näet, mitkä asiat ovat kurssilla keskeisiä. Jos aiheesta on paljon tehtäviä, se on tärkeää.
- Kaikkia tehtäväpapereita ei ole vielä tarkistettu. Tarkistus valmistuu tämän päivän aikana.

## Luento 23.4.3013 - Kuvaustehtävä

Mitkä seuraavista ovat kuvauksia?

- $f: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}, f([a]_5) = [a]_{10}$
- $f: \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_5, f([a]_{10}) = [a]_5$
- $f: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(a + \mathbb{Z}) = a^2$

- 1 Kaksi ensimmäistä ovat, mutta kolmas ei ole.
- 2 Toinen ja kolmas ovat, mutta ensimmäinen ei ole.
- 3 Kaikki ovat kuvauksia.
- 4 Muu vastaus.
- 5 En tiedä

<http://aktivator.jamo.fi>

# Ryhmähomomorfismi

## Määritelmä

Olkoot  $G$  ja  $H$  ryhmiä. Kuvausta  $f: G \rightarrow H$  nimitetään *ryhmähomomorfismiksi*, jos kaikilla  $x, y \in G$  pätee

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

# Ryhmähomomorfismin ydin

Ryhmähomomorfismin ytimessä ovat alkio, jotka kuvautuvat neutraalialkiolle.

## Määritelmä

Ryhmähomomorfismin  $f: G \rightarrow H$  ydin on

$$\text{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}.$$

## Ydin mittaa injektiivisyyttä

### Lause

Olkoon  $f: G \rightarrow H$  ryhmähomomorfismi. Kuvaus  $f$  on injektiivinen, jos ja vain jos  $\text{Ker } f = \{e_G\}$ .

## Esimerkki

Tutkitaan kuvausta  $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow S_3$ ,  $f([a]_6) = (123)^a$ .

# Miten homomorfismista saa isomorfismin?

## Määritelmä

Olkoot  $G$  ja  $H$  ryhmiä. Kuvaus  $f: G \rightarrow H$  on *ryhmäisomorfismi*, jos

- 1  $f$  on homomorfismi ja
- 2  $f$  on bijektio.



## Ydin on normaali aliryhmä

### Lause

Ryhmähomomorfismin ydin on normaali aliryhmä.

## Miten homomorfismista saa isomorfismin?

### Lause

Oletetaan, että  $f: G \rightarrow H$  on ryhmähomomorfismi. Tällöin kuvaus

$$\bar{f}: G/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f, \quad a \text{ Ker } f \mapsto f(a).$$

on isomorfismi.