Algebra I

17.4.2013

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Jos et jostakin painavasta syystä pääse kurssikokeeseen, ota yhteyttä luennoitsijaan.
- Tiistaille tuli lisää algebran ohjausaikoja. Katso päivitetty aikataulu kurssisivulta.

Miltä harjoitus 10 tuntui?

- En tehnyt.
- Liian työläältä.
- Melko työläältä.
- Melko helpolta.
- Liian helpolta.

Kuinka moni seuraavista väitteistä on totta?

- Syklinen aliryhmä on aina yhden alkion virittämä.
- Yhden alkion virittämä aliryhmä on aina syklinen.

Normaali aliryhmä

Määritelmä

Ryhmän G aliryhmä N on *normaali*, jos sen vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samat eli

$$gN = Ng \quad \text{kaikilla } g \in G.$$

Jos aliryhmä on normaali, sivuluokkien joukossa voidaan määritellä laskutomitus.

Tekijäryhmä

Määritelmä

Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä. Ryhmää G/N kutsutaan ryhmän G *tekijäryhmäksi* aliryhmän N suhteen, kun laskutoimituksena on

$$gN \cdot hN = ghN.$$

Tekijäryhmä

- Tekijäryhmän G/N neutraalialkio on N.
- Alkion gN käänteisalkio on $g^{-1}N$.

Normaalisuuskriteeri

Lause

Olkoon G ryhmä ja N sen aliryhmä. Aliryhmä N on normaali, jos ja vain jos

$$gng^{-1} \in N \quad \text{kaikilla } n \in N \text{ ja } g \in G.$$

Luento 16.4.2013 - Normaali aliryhmä

Oletetaan, että G on ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N.
Kuinka moni seuraavista väitteistä on totta?

- Kaikilla $g, h \in G$ pätee $gh = hg$.
- Kaikilla $g \in G$ ja $a \in N$ pätee $ga = ag$.

1. En tiedä
2. 2
3. 1
4. 0

http://aktivator.jamo.fi

Ryhmäisomorfismi

Määritelmä

Olkoot G ja H ryhmiä. Kuvausta $f\colon G \to H$ nimitetään *ryhmäisomorfismiksi*, jos

1. f on bijektio ja
2. $f(xy) = f(x)f(y)$ kaikilla $x, y \in G$.

Ryhmähomomorfismi

Määritelmä

Olkoot G ja H ryhmiä. Kuvausta $f\colon G \to H$ nimitetään *ryhmähomomorfismiksi*, jos kaikilla $x, y \in G$ pätee

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Esimerkki

Osoitetaan, että kuvaus $f\colon 7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$, $f(a) = [a/7]_3$ on ryhmähomomorfismi.

Ryhmähomomorfismin ominaisuuksia

Ryhmähomomorfismissa

- neutraalialkio kuvautuu neutraalialkioksi
- käänteisalkiot kuvautuvat käänteisalkioiksi
- aliryhmät kuvautuvat aliryhmiksi
- aliryhmän alkukuva on aliryhmä.

Ryhmähomomorfismin ydin

Ryhmähomomorfismin ytimessä ovat alkiot, jotka kuvautuvat neutraalialkiolle.

Määritelmä

Ryhmähomomorfismin $f\colon G \to H$ *ydin* on

$$\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}.$$

Esimerkki

Määritetään homomorfismin $f : 7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$, $f(a) = [a/7]_3$ ydin.

Ydin mittaa injektiivisyyttä

Lause

Olkoon $f\colon G \to H$ ryhmähomomorfismi. Kuvaus f on injektiivinen, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$.

Lineaarikuvaus

Määritelmä

Oletetaan, että V ja W ovat vektoriavaruuksia. Kuvaus $f\colon V \to W$ on *lineaarikuvaus*, jos

- $f(\bar{v} + \bar{w}) = f(\bar{v}) + f(\bar{w})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
- $f(c\bar{v}) = cf(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Rengashomomorfismi

Määritelmä

Olkoot R ja S renkaita. Kuvaus $f\colon R \to S$ on *rengashomomorfismi*, jos seuraavat ehdot pätevät kaikilla $a, b \in R$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$
2. $f(ab) = f(a)f(b)$
3. $f(1_R) = 1_S$.

Platonin kappaleet