

Algebra I

10.4.2013

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Kurssikoe järjestetään ke 8.5. klo 12.00–15.00.
- Jos et jostakin painavasta syystä pääse kurssikokeeseen, ota yhteys luennoitsijaan.

Millaisia harjoituksen 9 tehtävät olivat?

- Liian helppoja.
- Helppoja.
- Sopivia.
- Työläitä.
- Liian työläitä.
- En tehnyt niitä.

<http://aktivator.jamo.fi>

Kokonaisalue

Ratkaistaan kokonaisalueessa yhtälö $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Ratkaisuksi saatiin $x = 2$.

Sivuluokkien määrittäminen

Määritetään aliryhmän $H = \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$ sivuluokat symmetrisessä ryhmässä S_4 .

$$H = \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$$

$$(14)H = \{(14), (124), (143), (1243)\}$$

$$(23)H = \{(23), (132), (224), (1342)\}$$

$$(123)H = \{(123), (13), (1234), (134)\}$$

$$(142)H = \{(142), (24), (1432), (243)\}$$

$$(1324)H = \{(1324), (14)(23), (13)(24), (1423)\}$$

Mistä tiedetään, että kaikki sivuluokat ovat tässä?

Sivuluokkien määrittäminen

Määritetään aliryhmän $20\mathbb{Z}$ sivuluokat ryhmässä $4\mathbb{Z}$.

$$20\mathbb{Z} = \{\dots, -20, 0, 20, 40, \dots\}$$

$$4 + 20\mathbb{Z} = \{\dots, -16, 4, 24, 44, \dots\}$$

$$8 + 20\mathbb{Z} = \{\dots, -12, 8, 28, 48, \dots\}$$

$$12 + 20\mathbb{Z} = \{\dots, -8, 12, 32, 52, \dots\}$$

$$16 + 20\mathbb{Z} = \{\dots, -4, 16, 36, 56, \dots\}$$

Mistä tiedetään, että kaikki sivuluokat ovat tässä?

Jäännösluokkien laskutoimitus

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$$

Sivuluokkien laskutoimitus

Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmä H . Sivuluokkien joukossa halutaan määritellä laskutoimitus $*$ kaavalla

$$aH * bH = abH.$$

Mikä tahansa aliryhmä ei kelpaa

Tutkitaan ryhmän S_3 aliryhmää $B = \{(1), (13)\}$. Voiko sivuluokkien joukossa S/B määritellä laskutomituksen $*$ kaavalla

$$\sigma B * \tau B = \sigma\tau B?$$

Normaali aliryhmä

Määritelmä

Ryhmän G aliryhmä N on *normaali*, jos sen vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samat eli

$$gN = Ng \quad \text{kaikilla } g \in G.$$

Jos aliryhmä N on normaali, sivuluokkien joukossa G/N voidaan määritellä laskutoimitus edellä kuvatulla tavalla.

Esimerkki normaalista aliryhmästä

Osoitetaan, että ryhmän S_3 aliryhmä $A = \{(1), (123), (132)\}$ on normaali.

Kuinka selvittää, onko aliryhmä normaali?

Aina ei tarvitse käydä läpi kaikkia ryhmän alkioita:

- Määritä vasemmat ja oikeat sivuluokat.
- Jos saat kasaan molemmissa tapauksissa samat joukot, on aliryhmä normaali.

Luento 10.4.2013 - Sivuluokkien laskutoimitus

Ryhmällä \mathbb{Z}_{12} on normaali aliryhmä $N = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}$.

Kuinka moni seuraavista laskuista on laskettu oikein?

- $([1]_{12} + N) + ([1]_{12} + N) = [2]_{12} + N$
- $([3]_{12} + N) + ([2]_{12} + N) = [1]_{12} + N$
- $-([1]_{12} + N) = [3]_{12} + N$

- 1 0
- 2 1
- 3 2
- 4 3
- 5 En tiedä

<http://aktivator.jamo.fi>

Tekijäryhmä

Määritelmä

Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä. Ryhmää G/N kutsutaan ryhmän G *tekijäryhmäksi* aliryhmän N suhteen, kun laskutoimituksena on

$$gN \cdot hN = ghN.$$

Tekijäryhmän \mathbb{Z}_{12}/N yhteenlaskutaulu

$+$	N	$[1] + N$	$[2] + N$	$[3] + N$
N	N	$[1] + N$	$[2] + N$	$[3] + N$
$[1] + N$	$[1] + N$	$[2] + N$	$[3] + N$	N
$[2] + N$	$[2] + N$	$[3] + N$	N	$[1] + N$
$[3] + N$	$[3] + N$	N	$[1] + N$	$[2] + N$

- Onko tekijäryhmä vaihdannainen?
- Mikä on alkion $[2] + N$ virittämä aliryhmä?

Ryhmän \mathbb{Z}_{12} yhteenlaskutaulu

+	[0]	[4]	[8]	[1]	[5]	[9]	[2]	[6]	[10]	[3]	[7]	[11]
[0]	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7	11
[4]	4	8	0	5	9	1	6	10	2	7	11	3
[8]	8	4	0	9	1	5	10	2	6	11	3	7
[1]	1	5	9	2	6	10	3	7	11	4	8	0
[5]	5	9	1	6	10	2	7	11	3	8	0	4
[9]	9	1	5	10	2	6	11	3	7	0	4	8
[2]	2	6	10	3	7	11	4	8	0	5	9	1
[6]	6	10	2	7	11	3	8	0	4	9	1	5
[10]	10	2	6	11	7	3	0	4	8	1	5	9
[3]	3	7	11	4	8	0	5	9	1	6	10	2
[7]	7	11	3	8	0	4	9	1	5	10	2	6
[11]	11	3	7	0	4	8	1	5	9	2	6	10