

# Algebra I

27.3.2013

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Johanna Rämö

## Käytännön asioita

- Kokeen keskiarvo oli hieman alle 14 pistettä.
- Jotta kurssista voisi päästä läpi, on molemmista kurssikokeista saatava 8 pistettä. (Jos jäit rajan alle, tule juttelemaan.) Jos saat kokeista ja harjoituksista vähintään 24 pistettä, pääset taatusti läpi kurssista.
- Tarkista laskuharjoituspisteesi kurssisivulla olevasta taulukosta.

# Kokonaisluvut renkaan alkioina

Olkoon  $R$  rengas ja  $n$  mikä tahansa positiivinen kokonaisluku. Sovitaan, että

- $n = n \cdot 1_R$
- $-n = -(n \cdot 1_R)$
- $0 = 0_R$

# Monikerta ja kertolasku

## Lemma

Olkoon  $R$  rengas ja olkoon  $a \in R$ . Kaikilla  $n \in \mathbb{Z}$  pätee

$$na = (n \cdot 1_R)a.$$

# Renkaan laskusääntöjä

## Lause

Renkaassa  $R$  pätevät seuraavat laskulait kaikilla  $a, b \in R$ :

- 1  $0_R \cdot a = 0_R$  ja  $a \cdot 0_R = 0_R$
- 2  $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
- 3  $(-a)(-b) = ab$ .

# Polynomit

## Määritelmä

Olkoon  $R$  vaihdannainen rengas. Tällöin  $R$ -kertoiminen polynomi on ääretön jono

$$(a_k) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots),$$

missä  $a_k \in R$  kaikilla  $k \in \mathbb{N}$  ja vain äärellisen moni  $a_k$  poikkeaa nollasta.

## Polynomien tulo

Polynomien  $P = 6X^2 - 4X + 1$  ja  $Q = 2X^3 - X^2 + X$  tulo on

$$PQ = 12X^5 - 14X^4 + 12X^3 - 5X^2 + X.$$

## Määritelmä

Olkoon  $D$  vaihdannainen rengas, joka ei ole nollarengas. Oletetaan, että kaikilla  $a, b \in D$  ehdosta  $ab = 0_D$  seuraa  $a = 0_D$  tai  $b = 0_D$ . Tällöin  $D$  on *kokonaisalue*.



# Polynomien tulon aste

## Lause

Oletetaan, että  $R$  on kokonaisalue ja  $P, Q \in R[X]$  ovat nolasta poikkeavia polynomeja. Tällöin  $PQ \neq 0$  ja

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$$

## Luento 27.3.2013 - Polynomitehtävä

Kahden polynomien asteet tiedetään. Voiko tämän tiedon perusteella päätellä niiden summan asteen?

- 1 Kyllä, olivat asteet mitkä tahansa
- 2 Ei, olivat asteet mitkä tahansa
- 3 Toisinaan voi ja toisinaan ei
- 4 Summattavien asteista näkee, voiko summan asteen päätellä vai ei
- 5 Muu vastaus
- 6 En tiedä

<http://aktivator.jamo.fi>

## Määritelmä

Jos renkaan alkiolla on käänteisalkio kertolaskun suhteen, alkiota kutsutaan *yksiköksi*.

Renkaan  $R$  yksiköiden joukkoa merkitään  $R^*$ :

$$R^* = \{a \in R \mid a \text{ on yksikkö}\}.$$

## Renkaan $\mathbb{Z}_6$ yksiköt

$\cdot$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	0	0	0	0	0	0
$[1]_6$	0	1	2	3	4	5
$[2]_6$	0	2	4	0	2	4
$[3]_6$	0	3	0	3	0	3
$[4]_6$	0	4	2	0	4	2
$[5]_6$	0	5	4	3	2	1

$$\mathbb{Z}_6^* = \{[1]_6, [5]_6\}$$

## Renkaan $\mathbb{Z}_5$ yksiköt

$\cdot$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	0	0	0	0	0
$[1]_5$	0	1	2	3	4
$[2]_5$	0	2	4	1	3
$[3]_5$	0	3	1	4	2
$[4]_5$	0	4	3	2	1

$$\mathbb{Z}_5^* = \{[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$$

## Yksiköt muodostavat ryhmän

### Lause

Olkoon  $R$  rengas. Tällöin  $R^*$  on ryhmä kertolaskun suhteen.

## Määritelmä

Rengas  $R \neq \{0\}$  on *kunta*, jos se on vaihdannainen ja kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä.

- Nollarengas  $\{0\}$  on ainoa rengas, jossa *kaikki* alkiot ovat yksiköitä.
- Lineaarialgebrassa reaalityyppiset luvut voidaan korvata millä tahansa kunnalla.

## Luento 27.3.2013 - Luokkatehtävä

- Ekvivalenssiluokka on aina sivuluokka.
- Jäännösluokka on aina sivuluokka.
- Sivuluokka on aina jäännösluokka.
- Jäännösluokka on aina ekvivalenssiluokka.

Kuinka moni edellisistä väitteistä pitää paikkansa?

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5 En tiedä

<http://aktivator.jamo.fi>



## Sivuluokkien laskutoimitus

Olkoon  $G$  ryhmä, jolla on aliryhmä  $H$ . Sivuluokkien joukossa halutaan määritellä laskutoimitus  $*$  ehdolla

$$aH * bH = abH.$$