Algebra I

20.3.2013

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Luento 20.3.2013 - Sivuluokkatehtävä

Ryhmällä $\mathbb{Q}$ on aliryhmä $\mathbb{Z}$. Mitkä seuraavista sivuluokista ovat samoja? Kuinka monta erilaista perustelua keksit?

1. $-\dfrac{7}{6} + \mathbb{Z}$
2. $\dfrac{1}{6} + \mathbb{Z}$
3. $\dfrac{11}{6} + \mathbb{Z}$

Luento 20.3.2013 - Sivuluokkatehtävä

1. Mitkään sivuluokat eivät ole samoja.
2. Kohtien 1 ja 3 sivuluokat ovat samoja.
3. Kohtien 2 ja 3 sivuluokat ovat samoja.
4. Muu vastaus.
5. En tiedä.

http://aktivator.jamo.fi

Sivuluokkien ominaisuuksia

Lemma 1

Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmä H, ja olkoot $a, b \in G$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

1. $a^{-1}b \in H$
2. $a \in bH$
3. $b \in aH$
4. $aH = bH.$

Sivuluokkien ominaisuuksia yhteenlaskumerkinnöillä

Olkoon $(G, +)$ ryhmä, jolla on aliryhmä H, ja olkoot $a, b \in G$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

1. $-a + b \in H$
2. $a \in b + H$
3. $b \in a + H$
4. $a + H = b + H$.

Luento 20.3.2013 - Sivuluokat ja aliryhmät

1. Sivuluokka on aina aliryhmä.
2. Aliryhmä on aina sivuluokka.
3. Aliryhmä voi olla sivuluokka.

http://aktivator.jamo.fi

Luento 20.3.2013 - Sivuluokat ja aliryhmät

1. Ainoastaan väite 3 on totta.
2. Väitteet 1 ja 3 ovat totta, mutta 2 ei.
3. Kaikki väitteet ovat tosia.
4. Muu vastaus.
5. En tiedä.

Lagrangen lause

Lause

Olkoon G äärellinen ryhmä, jolla on aliryhmä H. Aliryhmän H kertaluku jakaa ryhmän G kertaluvun, ja

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}.$$

Lagrangen lauseen seuraus

Lause

Olkoon G äärellinen ryhmä, jonka kertaluku on n. Tällöin kaikilla $g \in G$ pätee $g^n = e$.

Rengas

Määritelmä

Joukko R kahdella laskutoimituksella $+$ ja $\cdot$ varustettuna on *rengas*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(R1) Pari $(R, +)$ on vaihdannainen ryhmä.

(R2) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(R3) Laskutoimituksella $\cdot$ on neutraalialkio.

(R4) Kaikilla $a, b, c \in R$ pätevät *osittelulait*:

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{ja} \quad (a+b)c = ac + bc.$$

Esimerkki renkaasta: Boolen rengas

Olkoon X joukko. Yhdiste ja leikkaus ovat potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ laskutoimituksia. Kummankaan suhteen $\mathcal{P}(X)$ ei ole ryhmä.

Esimerkki renkaasta: Boolen rengas

Olkoon X joukko. Yhdiste ja leikkaus ovat potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ laskutoimituksia. Kummankaan suhteen $\mathcal{P}(X)$ ei ole ryhmä.

Määritellään symmetrinen erotus $\triangle$ seuraavasti:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Esimerkki renkaasta: Boolen rengas

Olkoon X joukko. Yhdiste ja leikkaus ovat potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ laskutoimituksia. Kummankaan suhteen $\mathcal{P}(X)$ ei ole ryhmä.

Määritellään symmetrinen erotus $\triangle$ seuraavasti:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Kolmikko $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ on niin kutsuttu Boolen rengas.

Alirengas

Määritelmä

Oletetaan, että $(R, +, \cdot)$ on rengas ja $S \subset R$. Sanotaan, että kolmikko $(S, +, \cdot)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ *alirengas*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(AR1) Pari $(S, +)$ on ryhmän $(R, +)$ aliryhmä.

(AR2) Kaikilla $a, b \in S$ pätee $ab \in S$.

(AR3) $1_R \in S$.

Polynomit

Kaksi $\mathbb{R}$-kertoimista polynomia:

$$P = -4X^4 + 2X^2 \quad \text{ja} \quad Q = X^3 + 3X^2 + 2.$$

Polynomit

Kaksi $\mathbb{R}$-kertoimista polynomia:

$$P = -4X^4 + 2X^2 \quad \text{ja} \quad Q = X^3 + 3X^2 + 2.$$

Vaihtoehtoisesti kertoimien voi ajatella olevan jonkin muun renkaan alkioita.