

Algebra I

13.3.2013

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Tehtävä

Tänä vuonna ystävänpäivä oli torstaina. Minä viikonpäivänä ystävänpäivä on ensi vuonna?

Esimerkki

Mitä jää jakojäännökseksi, kun luku $24 + 4^{102}$ jaetaan luvulla 15?

Kongruenssin laskusääntöjä

Lause

Oletetaan, että $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Jos $a \equiv b \pmod{n}$ ja $c \equiv d \pmod{n}$, niin

$$a + c \equiv b + d \pmod{n} \quad \text{ja} \quad ac \equiv bd \pmod{n}.$$

Jäännösluokkien laskutoimitus

Jäännösluokkien laskutoimitusta ei voi määrittellä miten tahansa. Esimerkiksi seuraava kaava ei määritä jäännösluokkien joukon \mathbb{Z}_3 laskutoimitusta:

$$[a]_3 * [b]_3 = [2a + |b|]_3.$$

Jäännösluokkien laskutoimituksia

Lause

Jäännösluokkien joukossa \mathbb{Z}_n voidaan määritellä yhteenlasku

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$$

ja kertolasku

$$[a]_n \cdot [b]_n = [ab]_n.$$

Kongruenssin laskusääntöjä

Lause

Oletetaan, että $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Jos $a \equiv b \pmod{n}$ ja $c \equiv d \pmod{n}$, niin

$$a + c \equiv b + d \pmod{n} \quad \text{ja} \quad ac \equiv bd \pmod{n}.$$

Totta vai tarua?

- 1 Jäännösluokka on aina ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä.
- 2 Mikä tahansa ryhmän \mathbb{Z} epätriviaali aliryhmä on jäännösluokka.

Luento 13.3.2012 - Jännösluokkatehtävä

- 1 Väite 1 on totta, mutta väite 2 ei.
- 2 Väite 2 on totta, mutta väite 1 ei.
- 3 Muu vastaus.
- 4 En mitään hajua.

<http://aktivator.jamo.fi>

Kongruenssirelaatio

- Kongruenssin ehto voidaan kirjoittaa toisellakin tavalla.
- Jäännösluokatkin voidaan kirjoittaa samaan tapaan.

Ryhmän ekvivalenssirelaatio

Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Määritellään ryhmän G relaatio \sim seuraavasti:

$$a \sim b, \quad \text{jos} \quad a^{-1}b \in H.$$

Relaatio on ekvivalenssirelaatio ja sen ekvivalenssiluokat ovat muotoa

$$aH = \{ah \mid h \in H\},$$

missä $a \in G$.

Määritelmä

Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Joukkoa

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

kutsutaan aliryhmän H *vasemmaksi sivuluokaksi*.