

Algebra I

12.3.2013

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Tervetuloa takaisin!
- Ohjausajat ovat muuttuneet hieman.
- Kokeiden tarkistaminen on vielä hieman kesken.

Ekvivalenssirelaatio

Olkoon \sim joukon A relaatio. Kyseessä on *ekvivalenssirelaatio*, jos \sim toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $a, b, c \in A$:

- 1 $a \sim a$ (refleksiivisyys).
- 2 Jos $a \sim b$, niin $b \sim a$ (symmetrisyys).
- 3 Jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$ (transitiivisuus).

Kongruenssi on ekvivalenssirelaatio

Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ja olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin seuraavat väitteet pätevät:

- 1 $a \equiv a \pmod{n}$.
- 2 Jos $a \equiv b \pmod{n}$, niin $b \equiv a \pmod{n}$.
- 3 Jos $a \equiv b \pmod{n}$ ja $b \equiv c \pmod{n}$, niin $a \equiv c \pmod{n}$.

Ekvivalenssiluokka

Olkoon \sim joukon A ekvivalenssirelaatio. Alkion a *ekvivalenssiluokka* on

$$[a]_{\sim} = \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

Jäännösluokka on ekvivalenssiluokka

Kokonaisluvun a ekvivalenssiluokka modulo n on

$$[a]_n = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\}.$$

Toinen esimerkki ekvivalenssirelaatiosta

Olkoon S kaikkien niiden sanojen joukko, jotka ovat Nykysuomen sanakirjassa. Määritellään joukon S relaatio \sim seuraavasti:

$s \sim r$, jos s alkaa samalla kirjaimella kuin r .

Mistä tietää, ovatko ekvivalenssiluokat samat?

Lemma 1

Oletetaan, että \sim on joukon A ekvivalenssirelaatio. Olkoot $a, b \in A$. Tällöin

$$[a] = [b], \text{ jos ja vain jos } a \in [b].$$

Totta vai tarua?

Olkoon \sim joukon S ekvivalenssirelaatio.

- 1 Jokainen joukon S alkio kuuluu johonkin relaation \sim ekvivalenssiluokkaan.
- 2 Relaation \sim kahdessa eri ekvivalenssiluokassa ei voi olla samoja alkioita.
- 3 Jos $A \subset S$, on olemassa *jokin* ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokka A on.

Luento 12.3.2012 - Ekvivalenssirelaatiotehtävä

- ① Väite 2 on totta, mutta väitteet 1 ja 3 eivät.
- ② Väitteet 1 ja 2 ovat tosia, mutta väite 3 ei.
- ③ Kaikki väitteet ovat tosia.
- ④ Muu vastaus.
- ⑤ En mitään hajua.

<http://aktivator.jamo.fi>