Algebra I

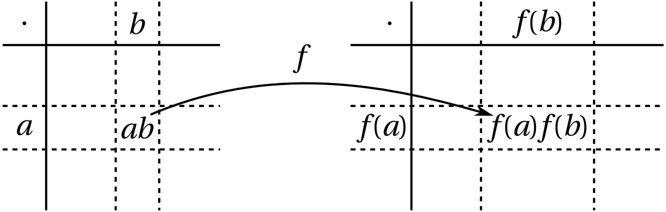
13.2.2013

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Jos et pääse kurssikokeeseen ja haluat osallistua korvaavaan kokeeseen, ota yhteyttä luennoitsijaan mahdollisimman pian.
- Tehtävät on tarkistettu. Harjoituksen 4 tähtitehtävä osattiin todella hyvin!
- Voit käydä kommentoimassa harjoituksen 4 tehtäviä osoitteessa http://aktivator.jamo.fi .
  1. Liian helppoa.
  2. Helppoa, muttei liian helppoa.
  3. Sopivaa.
  4. Työlästä, muttei liian työlästä.
  5. Liian työlästä

Isomorfisilla ryhmillä on samanlainen kertotaulu



Jotta kertotaulut olisivat samanlaiset, täytyy päteä $f(ab) = f(a)f(b)$.

Isomorfismin määritelmä

Määritelmä

Olkoot $(G, *)$ ja $(H, \circ)$ ryhmiä ja $f\colon G \to H$ jokin kuvaus. Kuvaus f on *ryhmäisomorfismi*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(IM1) Kuvaus f on bijektio.

(IM2) Kaikilla ryhmän G alkioilla x ja y pätee

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Jos kahden ryhmän välillä on isomorfismi, sanotaan, että ryhmät ovat *isomorfiset*.

Isomorfiset ryhmät ovat oleellisesti samanlaiset

Esimerkiksi ryhmät

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

ja $\mathbb{R}$ ovat isomorfiset.

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto a$$

Esimerkki isomorfismista

- Ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$
- Ryhmä $(\mathbb{Z}, *)$, missä laskutoimitus $*$ määritellään kaavalla $x * y = x + y - 5$.

Osoitetaan, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(\mathbb{Z}, *)$ ovat isomorfiset.

Vektoriavaruuksien isomorfismi

Miten määritellään vektoriavaruuksien välinen isomorfismi?

Oletetaan, että V ja W ovat vektoriavaruuksia. Ne ovat isomorfiset, jos on olemassa kuvaus $L\colon V \to W$, jolle pätee

a) $L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$
b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$
c) L on bijektio.

Isomorfismi säilyttää ryhmän ominaisuudet

Oletetaan, että $f\colon G \to H$ on ryhmäisomorfismi. Tällöin

- ryhmän G neutraalialkio kuvautuu ryhmän H neutraalialkiolle.
- alkioiden kääteisalkiot kuvautuvat kuva-alkioiden käänteisalkioiksi.
- potenssit kuvautuvat potensseiksi.

Ryhmä S_3

Millaisia alkioita on ryhmässä S_3?

Luentotehtävä 13.2.2013 - Symmetrinen ryhmä

Onko S_3 ryhmän S_4 aliryhmä?

Vastaa kysymykseen osoitteessa http://aktivator.jamo.fi.

Vastaus

Ei ole. Ryhmä S_3 on kylläkin isomorfinen erään ryhmän S_4 aliryhmän kanssa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & 4 \end{pmatrix}$$

Kolmio

Millainen ryhmä voisi liittyä kolmioon? Mitä ryhmän alkiot voisivat olla?

Tehtävä

Etsi pienin mahdollinen ryhmän $\mathbb{Q}^*$ aliryhmä, johon luku 10 kuuluu.

Muistutus: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Virittäminen

Määritelmä

Olkoon G ryhmä ja g sen alkio. Pienintä aliryhmää, joka sisältää alkion g, kutsutaan *alkion* g *virittämäksi aliryhmäksi* ja merkitään symbolilla $\langle g \rangle$.

Lause

Ryhmän G alkion g virittämä aliryhmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Virittäminen

Etsi pienin kellotauluryhmän K_{20} aliryhmä, johon alkio 5 kuuluu.

Alkion virittämän aliryhmän määrittäminen

Lemma 1

Olkoon G ryhmä ja g jokin sen alkio. Oletetaan, että positiiviselle kokonaisluvulle n pätee $g^n = e$. Tällöin

$$\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}.$$