INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 9
Torsdag 12.4.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppgifterna U1-U3 är avsedda som uppvärming. De är frivilliga enklare uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov!

U1. Sök integralfunktionen $\int te^t dt$ med hjälp av partiell integrering. Svar: $te^t - e^t + C$.

U2. Sök integralfunktionen $\int t \log(t) dt$ med hjälp av partiell integrering. Svar: $(t^2/2)\log(t) - t^2/4 + C$ då $t > 0$.

U3. Beräkna

$$I = \int\int_D (x+y)dxdy$$

som en itererad integral, då $D = [0,2] \times [0,1]$. Svar: $I = 3$.

Hemuppgifter

1. Bestäm integralen

$$\int\int_D y^2 e^{xy} dxdy,$$

då $D = [0,1] \times [0,1]$.

2. Låt $D = [0,1] \times [0,1]$ och anta att $f : D \to \mathbf{R}$ definieras av

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x, y \in \mathbf{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{om } x \notin \mathbf{Q} \text{ eller } y \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

där $\mathbf{Q}$ är de rationella talen. Visa med hjälp av definitionen av integralen att $\int\int_D f(x,y)dxdy$ inte existerar. *Tips:* om $\{R_{ij}\}$ är en godtycklig delning av D i slutna rektanglar, så finns det för varje i och j punkter $\xi_{ij}, \rho_{ij} \in R_{ij}$ för vilka $\xi_{ij} \in D \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$ och $\rho_{ij} \notin D \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$. Jämför Riemann-summorna $\sum_{i,j} f(\xi_{ij})\ area(R_{ij})$ och $\sum_{i,j} f(\rho_{ij})\ area(R_{ij})$ med varandra.

3. Låt $D = \{(x, y) : x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Beräkna integralen

$$\int\int_D x dx dy.$$

4. Anta att $A \subset \mathbf{R}^2$ är triangeln med hörnpunkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. Bestäm

$$\int\int_A \frac{xy}{1 + x^4} dx dy.$$

5. Låt $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \pi/2, 0 \leq x \leq \sin(y)\}$ och beräkna

$$\int\int_D y dx dy.$$

Försök att skissera integrationsområdet D.

6. Låt $A = \{(x, y) : 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Beräkna integralen

$$\int\int_A \log(x^2 + y^2) dx dy$$

med polära koordinaterna $w(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ som variabelbyte.