INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 8 (version 2)
Torsdag 29.3.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppgifterna U1-U3 är avsedda som uppvärming. Denna gång löser vi exceptionellt optimeringsproblemet från U1 i hemuppgift 3.

U1. Formulera följande uppgift som ett matematiskt optimeringsproblem: vi konstruerar en rektangel R med sidolängderna x och y, för vilken högst 2 meter material kan användas till sidorna av rektangeln, och söker x och y så att rektangeln R har den största arean. Svar: största värdet för arean $f(x,y) = xy$ i triangeln $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

U2. Skriv ut Lagranges multiplikatorvillkor för eventuella lokala extremvärdespunkter (x,y) för funktionen $f(x,y) = x - y$ i mängden $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, x^2 - y^3 = 0\}$. Svar: sidovillkoret $g(x,y) = x^2 - y^3$ ger villkoret $(1,-1) = \lambda(2x, -3y^2)$ för något $\lambda \in \mathbf{R}$, med $(x,y) \in A$ och $(x,y) \neq (0,0)$. Punkten $(0,0)$, där $\nabla g(0,0) = (0,0)$, bör också beaktas. [Själva optimeringsproblemet behöver inte lösas.]

U3. Formulera följande uppgift som ett optimeringsproblem: bland alla boxar i $\mathbf{R}^3$ med sidolängderna x, y och z och volymen $V = 1$ söker man en box vars sidor har minsta sammanlagda area. Svar: minsta värdet av $f(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$ med sidovillkoret $V(x,y,z) = xyz - 1 = 0$, där $x > 0, y > 0, z > 0$. [Problemet behöver inte lösas.]

Hemuppgifter

Den implicita funktionssatsen i fallen $n = 2$ och $n = 3$ formulerades på sidorna 96-97 och 98-99 i mina föreläsningsanteckningar. (Obs: dessa resultat finns inte i kompendiet).

1. Verifiera med hjälp av satsen om implicita funktioner i fallet $n = 3$ att ekvationen

$$e^{xyz} = 1$$

lokalt definierar en yta i $\mathbf{R}^3$ genom punkten $(1,1,0)$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan i $(1,1,0)$.

2. Undersök om det är möjligt att lokalt lösa ekvationssystemet

$$u = x + xyz, \quad v = y + xy, \quad w = z + 2x + 3z^2$$

som funktioner $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ då (x,y,z) är tillräckligt nära $(0,0,0)$. *Tips:* undersök om satsen om inversa funktioner i $\mathbf{R}^3$ kan användas.

3. Lös det optimeringsproblem som formulerades i uppgift U1 med hjälp av Lagranges metod.

4. Bestäm största och minsta värdet för funktionen

$$f(x,y) = xy - y, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

i mängden $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^3\}$.

5. Bestäm största och minsta värdet för funktionen

$$f(x,y) = x^3 - xy^2, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

i det slutna klotet $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. Sök största och minsta värdet för funktionen

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

i det slutna halvplanet $\{(x,y) : y \geq 0\}$. *Tips:* observera att det finns $M \geq 1$ så att

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{x-y}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{4}$$

för alla (x,y) med $y \geq 0$ och $x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2 \geq M^2$. Sök kritiska punkter (x,y) till f med $x^2 + y^2 < M^2, y > 0$ och jämför motsvarande $f(x,y)$ med $f(x,0)$ då $x \in [-M, M]$.