INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 7
Torsdag 22.3.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna U1-U3 är frivilliga enkla uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov!

U1. (linjär algebra: påminnelse) Beräkna kryssprodukten $a \times b$, då $a = (1, 2, 0)$ och $b = (1, 0, 1)$. Svar: $a \times b = (2, -1, -2)$.

U2. (linjär algebra: påminnelse) Förklara varför $a \times b$ är vinkelrät mot både a och b, då $a, b \in \mathbf{R}^3$. Orsak: låt $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ och verifiera att skalärprodukten $a \cdot (a \times b) = 0$. Notera också att $a \times b = -b \times a$.

U3. Beräkna Jacobis determinant $det f'(x, y)$, då

$$f(x, y) = (\cos(xy), \sin(xy)), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Svar: $det f'(x, y) = 0$ för alla (x, y).

Hemuppgifter

Kommentar: Implicita Funktionssatsen formulerades i kapitel 3.3 (sid 96-97) i mina föreläsningsanteckningar (Obs: inte i kompendiet).

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till grafen av funktionen

$$f(s, t) = st + s, \quad (s, t) \in \mathbf{R}^2,$$

i $(0, 0, 0)$, dvs. tangentplanet för ytan $r(s, t) = (s, t, f(s, t))$ i punkten $r(0, 0)$.

2. Verifiera att $r(\mathbf{R}^2)$ definierar en yta i $\mathbf{R}^3$, då

$$r(x, y) = (x, e^x, e^{xy}), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan i punkten $r(1, 1)$.

3. Verifiera med hjälp av satsen om implicita funktioner att ekvationen

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - 2xy = 0$$

definierar en stig $x \mapsto (x, f(x))$ i $\mathbf{R}^2$ omkring punkten $(1,1)$. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till stigen genom $(1,1)$.

4. Anta att $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ är ett polynom i variablerna x, y och att $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ är en punkt, där $F(x_0, y_0) = 0$ och gradienten $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Visa att F har oändligt många nollställen (x, y), dvs. att $F(x, y) = 0$ för oändligt många par (x, y). *Tips:* Tillämpa den Implicita Funktionssatsen på F omkring (x_0, y_0).

5. Beräkna Jacobis determinant $det f'(x, y, z)$ till funktionen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (x + y, xy, z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

I vilka punkter $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ är funktionen f lokalt inverterbar, dvs. Inversa Funktionssatsen kan tillämpas?

6. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen mängd. Funktionen $u \in \mathcal{C}(D)$ är *harmonisk* i D om

$$D_{11}u(x, y) + D_{22}u(x, y) = 0$$

för alla $(x, y) \in D$. Visa att funktionen

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

är harmonisk i $\mathbf{R}^2$. Ge också exempel på en funktion $v \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$ som inte är harmonisk i $\mathbf{R}^2$.