INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 6
Torsdag 15.3.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna U1-U4 är frivilliga enkla uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov!

U1. (linjär algebra: påminnelse) Bestäm ekvationen i formen $ax + by + c = 0$ för den linje i $\mathbf{R}^2$ som har riktningen $(1, -2)$ och som löper genom punkten $(1, 0)$. Svar: $2x + y - 2 = 0$.

U2. (linjär algebra: påminnelse) Låt P vara det plan i $\mathbf{R}^3$ som innehåller punkten $(1, 0, 1)$ och som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 0)$ och $(0, 1, 1)$. Bestäm ekvationen för P i formen $ax + by + cz + d = 0$. Svar: $x - y + z = 2$.

U3. Beräkna derivatan $\gamma'(t)$ till $\gamma(t) = (t, t^2, \log(1 + t^2))$, där $t > 0$. Svar: $\gamma'(t) = (1, 2t, \frac{2t}{1+t^2})$.

Hemuppgifter

1. Bestäm tangenten i punkten $t = \pi$ till stigen $\gamma(t) = (\sin(t), \sin(t^2))$, där $t > 0$.

2. Betrakta stigen $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, där $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ då $t \in [0, 2\pi]$. Verifiera att $\gamma(t)$ och $\gamma'(t)$ är vinkelräta mot varandra och att $\gamma''(t) = -\gamma(t)$ för alla $t \in [0, 2\pi]$.

3. Låt $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$ då $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Verifiera följande fakta om funktionen f. (i) $(0, 0)$ är den enda kritiska punkten till f, (ii) $(0, 0)$ är en sträng lokal minimumpunkt till f, och (iii) $f(1, y) \to -\infty$ då $y \to -\infty$.

4. Bestäm största och minsta värdet till $f(x, y) = x^2 - y^3$ i den slutna cirkelskivan $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. (Varför finns de största och minsta värdena i detta fall?) *Tips:* sök eventuella lokala extremvärden till f i $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ och jämför med minimum och maximum för $f(x, y)$ på cirkeln $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. För detta studera $h(y) = -y^3 + 1 - y^2$ där $y \in [-1, 1]$ (dvs. substituera $x^2 = 1 - y^2$ i uttrycket för $f(x, y)$).

5. Definiera funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ med $f(0,0) = 0$ och

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Verifiera följande fakta om funktionen f. (i) $D_1 f(0,y) = -y$ då $y \neq 0$ och $D_2 f(x,0) = x$ då $x \neq 0$ (derivera $f(x,y)$ partiellt då $(x,y) \neq (0,0)$), (ii) $D_1 f(0,0) = 0 = D_2 f(0,0)$ (använd definitionen), (iii) $D_{12} f(0,0) \neq D_{21} f(0,0)$ (använd definitionen samt (i) och (ii)). *Kommentar:* Uppgiften visar att Sats 2.8.3 inte gäller allmänt.

6. Anta att $f : A \to \mathbf{R}$ tillhör klassen $\mathcal{C}^3$, där $A \subset \mathbf{R}^2$ är en öppen mängd. Anta att $(x,y) \in A$ är en kritisk punkt till f för vilken motsvarande kvadratiska form

$$Q(h,k) = D_{11} f(x,y) h^2 + 2 D_{12} f(x,y) hk + D_{22} f(x,y) k^2, \quad (h,k) \in \mathbf{R}^2,$$

är indefinit. Visa att (x,y) är en sadelpunkt till f, dvs. (x,y) är varken en lokal maximum- eller en lokal minimumpunkt till f.
Komplettera följande skiss: låt $Q(h_1,k_1) > 0$ och $Q(h_2,k_2) < 0$. Visa att $f(x+th_1, y+tk_1) > f(x,y)$ då $0 < t < c_1$ och $f(x+th_2, y+tk_2) < f(x,y)$ då $0 < t < c_2$ (där $c_1, c_2 > 0$ är tillräckligt små), genom att analysera Taylors polynom av andra ordningen till f i punkten (x,y) (se Sats 2.8.4).