INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 5
Torsdag 23.2.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna U1-U4 är frivilliga enkla uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov!

U1. Sök de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = \cos(x+y)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Svar: varje punkt $(x, y)$ på de parallella linjerna $y = -x + n\pi$, där $n \in \mathbf{Z}$.

U2. Verifiera att $(0, 0)$ inte är en lokal extremvärdespunkt för funktionen $f(x, y) = x^2 + y^5$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Svar: betrakta $f(0, y)$ då $y > 0$ och $y < 0$.

U3. Undersök (exempelvis med kvadratkomplettering) vilken typ följande kvadratiska former har:
(i) $Q_1(h, k) = h^2 + hk + k^2, \quad (h, k) \in \mathbf{R}^2$,
(ii) $Q_2(h, k) = h^2 + 2hk - k^2, \quad (h, k) \in \mathbf{R}^2$.
Svar: $Q_1$ är positivt definit, och $Q_2$ är indefinit.

U4. Har funktionen $f(x, y) = x+y$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, lokala extremvärdespunkter? Svar: nej. [Orsak: $f$ saknar kritiska punkter (verifiera), alternativt betrakta $f(x, y)$ på linjerna $x + y = t$.]

Hemuppgifter

1. Bestäm de kritiska punkterna till funktionen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, då

$$f(x, y, z) = x^4 - 3xy^3 + 3xz + 2, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

2. Bestäm Taylors polynom av andra ordningen till $f$ omkring $(0, 0)$, där

$$f(x, y) = e^{x+y} \cos(xy), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

3. Bestäm den kvadratiska form $Q(h, k)$ som svarar mot funktionerna
(i) $f(x, y) = -x^2 - y^4, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$,

(ii) $g(x,y) = -x^2 - y^3, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$
i den kritiska punkten $(0,0)$. Undersök direkt om $(0,0)$ en lokal extremvärdespunkt till $f$ eller $g$. (Obs. Kvadratiska formen $Q$ kan inte användas.)

4. Bestäm de lokala extremvärdespunkterna till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

samt analysera deras typ.

5. Sök de lokala extremvärdespunkterna till funktionen

$$f(x,y) = x^5 y + xy^5 + xy, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

samt analysera deras typ.

6. Låt $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ vara funktionen

$$f(x,y) = \sin(x+y), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Visa: (i) varje $(x,y)$ på de parallella linjerna $y = -x + \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, är kritiska punkter till $f$, (ii) motsvarande kvadratiska former $Q$ är endera positivt eller negativt semidefinita, (iii) varje punkt $(x, -x + \frac{\pi}{2} + n\pi)$ är en lokal maximumpunkt till $f$ för jämna $n$ och en lokal minimumpunkt för udda $n$ (använd sinusfunktionens egenskaper!).

**1. kursprovet: tisdag 28.2. kl 13-15** (samtidigt kursprov i Topologi I). Tag kontakt med föreläsaren ifall tiden definitivt är olämplig, alternativ ordnas vid behov.

- Provområdet: kapitel 1.1-2.9 i kompendiet (men **inte** största och minsta värdet i en given mängd). Översikt av provområdet och några tidigare kursprovsuppgifter på föreläsningen ons 22.2.

Föreläsningarna fortsätter på II. perioden måndagen 12.3. Övning 6 hålls torsdag 15.3 (uppgifterna länkas till kurssidan mot slutet av vecka 9).