INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 4
Torsdag 16.2.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna U1-U4 är frivilliga enkla uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov!

U1. Förklara varför vektorfunktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (e^x, xy)$ då $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, är deriverbar i $\mathbf{R}^2$, samt bestäm avbildningsmatrisen till derivatan $f'(x,y)$. Svar: $f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

U2. Bestäm avbildningsmatrisen till derivatan $f'(x,y,z)$, då $f(x,y,z) = (e^x, e^{xy}, e^{xyz})$ för $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Svar: $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \end{pmatrix}$.

U3. Bestäm den riktade derivatan $D_v f(x,y)$ i punkten $(1,0)$ i riktningen $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, då $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Svar: $D_v f(1,0) = -\sqrt{2}\cos(1)$.

U4. Bestäm de högre partiella derivatorna $D_{12}f$ och $D_{23}f$ då

$$f(x,y,z) = e^{x^2+yz}, \quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3.$$

Svar: $D_{12}f(x,y,z) = 2xze^{x^2+yz}$ och $D_{23}f(x,y,z) = (1+yz)e^{x^2+yz}$.

Hemuppgifter

1. Verifiera att vektorfunktionen

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \quad f(x,y) = (x^2y, e^{-xy}, x+y), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

är deriverbar i $\mathbf{R}^2$, och bestäm derivatan $f'(x,y)$ som en avbildningsmatris.

2. Låt $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning. Visa att A är deriverbar i varje punkt $x \in \mathbf{R}^m$, och bestäm derivatan $A'(x)$. *Tips:* utgå från definitionen och tillämpa lineariteten av A på uttrycket $A(x+h) - A(x)$.

3. Bestäm avbildningsmatrisen $(f \circ g)'(\pi, 0)$ i punkten $(\pi, 0)$ för den sammansatta funktionen $f \circ g$ med hjälp av kedjeregeln, då $f(x, y) = (e^y, xy)$ och $g(x, y) = (\sin(x), \sin(xy))$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

4. Höjden i terrängen i punkten (x, y) satisfierar

$$h(x, y) = \frac{10}{3 + x^2 + y^2}.$$

En bäck rinner genom punkten $(3, 2)$. Bestäm bäckens riktning i denna punkt. (Vatten rinner nedåt i den brantaste riktningen från en punkt.)

5. Bilda de högre partiella derivatorna $D_{22}f$, $D_{21}f$ och $D_{12}f$ till funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som definieras av $f(x, y) = \sin(xy)\cos(x)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

6. Anta att funktionen $f : A \to \mathbf{R}^2$ är deriverbar i A, där $A \subset \mathbf{R}^2$ är en öppen mängd. Låt $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in A$ vara en stig så att derivatorna x' och y' är kontinuerliga i intervallet Δ, och $f(\gamma(t)) = C$ för alla $t \in \Delta$, där C är en konstant. (Dvs. $\gamma(t)$ tillhör en fixerad nivåkurva till f.) Visa att

$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0, \quad t \in \Delta.$$

Tips: tillämpa kedjeregeln på avbildningen $t \mapsto (f \circ \gamma)(t) = C$. (Avsikten med uppgiften är att arbeta igenom beviset till Sats 2.7.5 i kompendiet, som inte behandlades på föreläsningarna.)

Förslag till datum för 1. kursprovet: **tisdag 28.2. kl 13-15** (samtidigt kursprov i kursen Topologi I). Tag kontakt med föreläsaren ifall tiden definitivt är olämplig, alternativ ordnas vid behov.