INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 3
Torsdag 9.2.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna U1-U4 är frivilliga enkla uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov!

U1. Beräkna gradienten $\nabla f(x,y)$ då $f(x,y) = x^2\sin(y^2)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Svar: $\nabla f(x,y) = (2x\sin(y^2), 2x^2y\cos(y^2))$.

U2. Bestäm gradienten $\nabla f(x,y)$ då $f(x,y) = x^3\cos(xy)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Svar: $\nabla f(x,y) = (3x^2\cos(xy) - x^3y\sin(xy), -x^4\sin(xy))$.

U3. Beräkna $\nabla f(x,y,z)$ då $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ för $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Svar: $\nabla f(x,y,z) = -2e^{-(x^2+y^2+z^2)}(x,y,z)$.

U4. Bestäm derivatan $(f \circ \gamma)'(t)$ med hjälp av kedjeregeln, då $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, och $\gamma(t) = (e^t, e^{-t})$ för $t \in \mathbf{R}$. Jämför detta med att bilda $f(\gamma(t))$ samt derivera direkt. Svar: $(f \circ \gamma)'(t) = \frac{2(-e^t+e^{-t})}{(1+e^{2t}+e^{-2t})^2}$.

Hemuppgifter

1. Ge exempel på en funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ för vilken den partiella derivatan $D_2f(x,y) = 0$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, men f är inte kontinuerlig i $\mathbf{R}^2$. (Kom ihåg: D_2f beräknas på linjer parallella med y-axeln.)

2. Beräkna gradienten av funktionen $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$,

$$f(u) = \|u\|^{\|u\|} = e^{\|u\| \log \|u\|}, \quad u \in R^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

3. Visa att funktionen f, definierad av $f(0,0) = 0$ och

$$f(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

är deriverbar i $(0,0)$.

4. Verifiera på basen av Sats 2.5.1 att att funktionen $f(x) = e^{-\|x\|^2}, x \in \mathbf{R}^n$, är deriverbar i $\mathbf{R}^n$.

5. Anta att $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ satisfierar $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Visa att f är en konstant funktion. *Tips.* Rör dig från $(0, 0)$ till en godtycklig punkt (x, y) längs en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna (jämför med beviset till Sats 2.5.1).

6. Låt $w(x, y) = (e^{x-y}, e^{xy})$ och

$$h(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

då $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Bilda den sammansatta funktionen $h \circ w$. Beräkna de partiella derivatorna $D_1(h \circ w)$ och $D_2(h \circ w)$ med hjälp av kedjeregeln.