INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 2
Torsdag 2.2.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna U1-U4 är frivilliga enklare uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov!

U1. Beräkna avståndet $\|x-y\|$, då $x=(1,0,1,-0), y=(1,2,2,1) \in \mathbf{R}^4$. Svar: $\sqrt{6}$.

U2. Bestäm derivatan $f'(x)$, då $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definieras av $f(x)=x\cos(x^2)$ för $x\in\mathbf{R}$. Svar: $\cos(x^2)-2x^2\sin(x^2)$.

U3. Bestäm den naturliga definitionsmängden $A\subset\mathbf{R}^2$ till funktionen

$$f(x,y)=x^y=e^{y\log(x)},$$

samt sök de partiella derivatorna D_1f och D_2f. Svar: $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x>0, y\in\mathbf{R}\}$, och $D_1f(x,y)=(1/x)x^y$, $D_2f(x,y)=(\log x)x^y$.

U4. Bestäm randen ∂A och det slutna höljet $\overline{A}$, då

$$A=\{(0,y)\in\mathbf{R}^2 : 0\le y\le 2\}\subset\mathbf{R}^2,$$

genom att rita lämpliga bilder. Svar: $\partial A=\overline{A}=A$.

Hemuppgifter

1. Skissera nivåkurvorna hos funktionen $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$,

$$f(x,y)=xy,\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

dvs. identifiera mängderna $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : xy=c\}$ för olika värden på $c\in\mathbf{R}$.

2. Visa att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2+2x^2y}{x^2+y^2}=0$$

genom att introducera polära koordinater $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, där $\varphi\in[0,2\pi)$ och $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

3. Är det möjligt att definiera $g(0,0)$ så att funktionen g är kontinuerlig i origo $(0,0)$, då

$$g(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\in \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}?$$

4. Låt

$$g(x)=\frac{1}{1+\|x\|^2}, \quad x\in \mathbf{R}^n.$$

Verifiera att funktionen g är kontinuerlig i $\mathbf{R}^n$ genom att lämpligen använda allmänna räkneregler och faktan om kontinuitet (som antas vara kända).

5. Beräkna de partiella derivatorna $D_1f(x,y,z)$, $D_2f(x,y,z)$ och $D_3f(x,y,z)$, då

$$f(x,y,z)=e^x\cos(x+y+z)+y\sin(z), \quad (x,y,z)\in \mathbf{R}^3.$$

6. Sök de partiella derivatorna $D_1f(x,y)$ och $D_2f(x,y)$ till funktionen $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ som definieras av

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|, \quad (x,y)\in \mathbf{R}^2.$$

Obs: punkten $(x,y)=(0,0)$ bör betraktas separat på basen av definitionen av de partiella derivatorna.

Påminnelse: gränsvärdet $\lim_{x\to y} f(x)=a$ för funktioner f av flera variabler definierades med hjälp av (ε,δ) (kompendiet använder vektorföljder, vilket ger samma begrepp). Se kursmappen "Vektoranalys (våren 2012)" i rummet C326 med kopior av mina föreläsningsanteckningar.

Extra poäng (skalan 0-6) för kryssade hemuppgifter enligt följande: $20\% = +1p., 30\% = +2p., 40\% = +3p., 50\% = +4p., 60\% = +5p., 70\% = +6p.$