INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 11 (sista)
Torsdag 26.4.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppgifterna U1-U3 är avsedda som uppvärming. De är frivilliga uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov.

U1. Låt $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ samt låt r vara ytan $r(x, y) = (x, y, xy)$, $(x, y) \in D$. Bestäm $D(x, y) = \|D_1 r(x, y) \times D_2 r(x, y)\|$. Svar: $D(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

U2. Bestäm arean (ytintegralen)

$$area(r(D)) = \int\int_D D(x, y) dxdy$$

för ytan r i uppgift U2. Svar: $area(r(D)) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} r dr = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ (använd polära koordinater).

U3. Låt $F = (F_1, F_2, F_3) : D \to \mathbf{R}^3$ vara ett vektorfält i klassen $\mathcal{C}^1$, där $D \subset \mathbf{R}^3$ är en öppen mängd. *Divergensen* $\nabla \cdot F$ av F definieras som funktionen

$$\nabla \cdot F = D_1 F_1 + D_2 F_2 + D_3 F_3.$$

Bestäm $\nabla \cdot F$ då $F(x, y, z) = (\cos(xy), \sin(xy), xy + z^2)$. Svar: $\nabla \cdot F(x, y, z) = -y \sin(xy) + x \cos(xy) + 2z$.

Hemuppgifter

1. Låt A vara cylindern $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, där $R > 0$ och $h > 0$ är givna. Beräkna trippelintegralen

$$\int_A z(x^2 + y^2) dxdydz.$$

2. Bestäm volymen av ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ genom att reducera detta till enhetssfären i $\mathbf{R}^3$ med det linjära variabelbytet $w(x, y, z) = (ax, by, cz)$.

3. Låt $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara vektorfältet $F(x, y) = (x^2, y)$ och $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ vara stigen $\gamma(t) = (t, t^2)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma F \cdot ds.$$

4. Låt $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara vektorfältet $F(x, y) = (y^2, -x)$ och $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ då $t \in [0, 2\pi]$, där $R > 0$ är fixerad. Beräkna

$$\oint_\gamma F \cdot ds$$

med hjälp av Greens formel.

5. Låt $r(D)$ vara ytan $r(\varphi, t) = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, t)$, där $(\varphi, t) \in D = (0, 2\pi) \times (0, 1)$. Skissera $r(D)$ och bestäm arean av ytan $r(D)$.

6. Låt $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$. Bestäm totalflödet

$$\int\int_{\partial D} F \cdot ndS$$

av vektorfältet $F(x, y, z) = (x, y, z)$ genom ytan ∂D med hjälp av divergenssatsen. Här är $n(x, y)$ den normerade ytternormalen till ∂D i motsvarande punkt.

2. kursprovet: **fredag 4.5. kl 13-15** (samtidigt kursprov för kursen Logiikka I). Alternativa provtillfället: **onsdag 9.5. kl 13-15** (samtidigt kursprov för kursen Topologia I). Tag kontakt med föreläsaren ifall fredag 4.5. definitivt är olämplig. *I kursprovstillfället får ni ha med en minneslapp på en (= 1) A4-sida.*

Genomgång av provområdet och tidigare provuppgifter onsdag 25.4.