

# INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Vektoranalys

Räkneövning 10

Torsdag 19.4.2012

## Uppvärmingsuppgifter

Uppgifterna U1-U4 är avsedda som uppvärmning. De är frivilliga enklare uppgifter, som inte räknas med bland kryssen för extra poäng. Fråga om dessa vid behov.

U1. Bestäm  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  genom att substituera  $x = \sin t$  eller  $x = \cos t$ . Svar:  $\pi/4$ .

U2. Repetera varför den oegentliga integralen  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  konvergerar. Orsak: om  $0 < c < 1$ , så gäller att  $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(1 - \sqrt{c}) \rightarrow 2$  då  $c \rightarrow 0+$ .

U3. Repetera varför den oegentliga integralen  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  divergerar. Orsak: om  $c > 1$ , så gäller att  $\int_1^c \frac{1}{x} dx = \log(c) \rightarrow \infty$  då  $c \rightarrow \infty$ .

U4. Beräkna Jacobianen  $\det w'(x, y)$  då  $w(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ . I vilka punkter  $(x, y)$  är Jacobianen olika 0? Svar:  $\det w'(x, y) = -8xy = 0$  om  $x = 0$  eller  $y = 0$ .

## Hemuppgifter

1. Låt  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ . Beräkna integralen

$$I = \int \int_A (x + y) dx dy$$

med variabelbytet  $(x, y) = w(u, v) = (u + v, u - v)$ . Kontrollera svaret genom att alternativt beräkna  $I$  direkt som en itererad integral.

2. Anta att  $A = \{(x, y) : 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Beräkna integralen

$$\int \int_A \log(x^2 + y^2) dx dy$$

genom att byta till polära koordinater  $(x, y) = w(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ .

3. Beräkna integralen

$$\int \int_A (x^2 + y^2) dx dy,$$

där  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ .

4. Anta att  $f(x, y) = \max(x, y)$  då  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  och  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ . Bestäm integralen

$$\int \int_D f(x, y)^2 dx dy$$

genom att integrera med hjälp av nivåkurvor. *Tips:* observera att  $G_t = \{(x, y) \in D : f(x, y) \leq t\}$  är också en rektangel.

5. Visa att den oegentliga integralen

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{xy}}$$

konvergerar samt bestäm värdet.

6. Undersök om den oegentliga integralen

$$\int \int_A e^{-x-y} dx dy$$

konvergerar, där  $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x\}$ . Bestäm värdet av integralen ifall den konvergerar.

Förslag till tid för **2. kursprovet: fredag 4.5. kl 13-15** (samtidigt kursprov för kursen Logiikka I). (Som alternativ tid finns onsdag 9.5. kl 13-15, vilket samtidigt är kursprov för kursen Topologia I). Tag kontakt med föreläsaren ifall den föreslagna tiden fredag 4.5. definitivt är olämplig.