INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 1
Torsdag 26.1.2012

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna är avsedda som lättare frivilliga ”fingerövningar” och de räknas inte med bland de egentliga hemuppgifterna. Fråga om dessa vid behov!

U1. Beräkna $x \cdot y$, då $x = (1, -1, 1, -1), y = (-1, 1, 1, -1) \in \mathbf{R}^4$. Svar: 0.

U2. Bestäm $(x + y) \cdot (x - y)$ då $x, y \in \mathbf{R}^n$ satisfierar $\|x\| = 2$ och $\|y\| = 3$. Svar: -5.

U3. Förklara varför vektorföljden $((e^{-k}, e^k))_{k\in\mathbf{N}}$ inte konvergerar i planet $\mathbf{R}^2$ då $k \to \infty$.

U4. Förklara varför mängden

$$A = \{(x, 0, 0) \in \mathbf{R}^3 : x \in \mathbf{R}\}$$

är sluten i $\mathbf{R}^3$.

Hemuppgifter

1. Anta att vektorerna $x, y \in \mathbf{R}^n$ satisfierar $\|x\| = \|y\| = 1$. Vilken är den största möjliga längden $\|x - 2y\|$ för differensvektorn $x - 2y$? *Tips*: utveckla $\|x - 2y\|^2 = (x - 2y) \cdot (x - 2y)$ och notera att Cauchy-Schwartz olikhet ger gränser för skalärprodukten $x \cdot y$.

2. Verifiera att *parallellogramregeln*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in \mathbf{R}^n,$$

gäller för normen $\|u\|^2 = u \cdot u$ i $\mathbf{R}^n$. Illustrera geometriskt då $n = 2$.

3. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{k\to\infty} (0, \sin(1/k), (1 + k)^{1/k})$$

i $\mathbf{R}^3$. (Det är nyttigt att veta $\log((1+k)^{1/k}) = (1/k)\log(1+k)$.)

4. Anta att $(x^{(k)}) \subset \mathbf{R}^n$ är en begränsad vektorföljd i $\mathbf{R}^n$, dvs. det finns en konstant $C < \infty$ så att $\|x^{(k)}\| \leq C$ för varje $k \in \mathbf{N}$. Undersök om vektorföljden $(y^{(k)})$ alltid konvergerar i $\mathbf{R}^n$, då

$$y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\sqrt{k}}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

5. Visa att den öppna rektangeln

$$(0,1) \times (0,1) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

är en öppen mängd i $\mathbf{R}^2$, och att motsvarande slutna rektangel $[0,1] \times [0,1]$ är en sluten mängd i $\mathbf{R}^2$. *Tips:* rita en bild för $(0,1) \times (0,1)$. Gränsvärdesvillkoret är användbart för fallet $[0,1] \times [0,1]$.

6. Är $(0,1) \times (0,1)$ eller $[0,1] \times [0,1]$ kompakta mängder i $\mathbf{R}^2$? Motivera!

Extra poäng (skalan 0-6) för kryssade hemuppgifter enligt följande: $20\% = +1p., 30\% = +2p., 40\% = +3p., 50\% = +4p., 60\% = +5p., 70\% = +6p.$

Obs. Kursmappen Vektoranalys (våren 2012) i rummet C326 innehåller kopior av mina föreläsningsanteckningar. Påminnelse: öppna och slutna mängder definierades på andra (men likvärdiga) sätt jämfört med kompendiet.