INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 9
Torsdag 12.4.2012
Alexander Kainberg

1. Bestäm integralen

$$\int\int_D y^2 e^{xy} dxdy,$$

då $D = [0,1] \times [0,1]$.

Lösning. Vi räknar:

$$\begin{aligned}\int\int_D y^2 e^{xy} dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 y^2 e^{xy} dxdy = \int_0^1 \left(\Big/_{0}^{1} ye^{xy} \right) dy \\ &= \int_0^1 (ye^y - y)\, dy = \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 ydy \\ &= 1 \cdot e - \int_0^1 e^y dy - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Låt $D = [0,1] \times [0,1]$ och anta att $f : D \to \mathbf{R}$ definieras av

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x, y \in \mathbf{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{om } x \notin \mathbf{Q} \text{ eller } y \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

där $\mathbf{Q}$ är de rationella talen. Visa med hjälp av definitionen av integralen att $\int\int_D f(x,y)dxdy$ inte existerar. *Tips:* om $\{R_{ij}\}$ är en godtycklig delning av D i slutna rektanglar, så finns det för varje i och j punkter $\xi_{ij}, \rho_{ij} \in R_{ij}$ för vilka $\xi_{ij} \in D \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$ och $\rho_{ij} \notin D \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$. Jämför Riemann-summorna $\sum_{i,j} f(\xi_{ij})\ area(R_{ij})$ och $\sum_{i,j} f(\rho_{ij})\ area(R_{ij})$ med varandra.

Lösning. Det gäller att komma ihåg från *Topologi I* (eller *Analys I*) att i varje intervall existerar både rationella och irrationella tal.

Låt $\{R_{ij}\}$ vara en godtycklig delning av D i slutna rektanglar $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. I varje rektangel existerar nu $\xi_{ij}, \rho_{ij} \in R_{ij}$ för vilka $\xi_{ij} \in D \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$ och $\rho_{ij} \notin D \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$.

Låt $\zeta \in D$. Vi får nu att undersumman är

$$s(f, R_{ij}) = \sum_{ij} \inf\{R(f, R_{ij}) : \zeta \in R_{ij}\} = \sum_{ij} f(\rho_{ij}) area(R_{ij}) = 0,$$

och på motsvarande sätt är översumman $S(f, R_{ij}) = 1$. Detta innebär att f inte är Riemann-integrerbar.

3. Låt $D = \{(x, y) : x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Beräkna integralen

$$\int\int_D x dx dy.$$

Lösning. Det lönar sig att rita en bild på integreringsområdet. Vi märker att det handlar om en triangel med hörnpunkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$. Vi får alltså att

$$\begin{aligned}\int\int_D x dx dy &= \int_0^1 \int_x^1 x dy dx = \int_0^1 \left(\Big/_x^1 xy \right) dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \Big/_0^1 (\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}) = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

4. Anta att $A \subset \mathbf{R}^2$ är triangeln med hörnpunkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. Bestäm

$$\int\int_A \frac{xy}{1 + x^4} dx dy.$$

Lösning. Integreringsområdet är $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Vi får att

$$\begin{aligned}\int\int_A \frac{xy}{1 + x^4} dx dy &= \int\int_A \frac{xy}{1 + x^4} dy dx = \int_0^1 \int_0^x \frac{xy}{1 + x^4} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\Big/_0^x \frac{xy^2}{2(1 + x^4)} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^4} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{4x^3}{1 + x^4} dx = \frac{1}{8} \Big/_0^1 \log(1 + x^4) \\ &= \frac{\log 2}{8}.\end{aligned}$$

5. Låt $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \pi/2, 0 \leq x \leq \sin(y)\}$ och beräkna

$$\int\int_D y dx dy.$$

Försök att skissera integrationsområdet D.

Lösning. Integrationsområdet liknar en triangel (gås igenom på räkneövningen). Vi får att

$$\begin{aligned}\int\int_D y dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} y dx dy = \int_0^{\pi/2} y \sin(y) dy \\ &= -\Big/_0^{\pi/2} \cos(y) y + \int_0^{\pi/2} \cos(y) dy \\ &= \Big/_0^{\pi/2} \sin(y) = 1.\end{aligned}$$

6. Låt $A = \{(x, y) : 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Beräkna integralen

$$\int\int_A \log(x^2 + y^2) dx dy$$

med polära koordinaterna $w(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ som variabelbyte.

Lösning. Då vi gör ett variabelbyte måste vi komma ihåg jakobianen. Då vi integrerar med polära koordinater i två dimensioner får vi jakobianen r (kompendiet s. 87). Vi får att $A = \{(x, y) : 1/2 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$, varav

$$\begin{aligned}\int\int_A \log(x^2 + y^2) dx dy &= \int_{1/2}^2 \int_0^\pi \log(r^2) r d\varphi dr = 2\pi \int_{1/2}^2 r \log r dr \\ &= 2\pi \left(\Big/_{1/2}^2 \frac{r^2 \log r}{2} - \int_{1/2}^2 \frac{r^2}{2r} dr \right) \\ &= 2\pi \left(2 \log 2 - \frac{\log(1/2)}{8} \right) - 2\pi \left(\Big/_{1/2}^2 \frac{r^2}{4} \right) \\ &= 2\pi \left(2 \log 2 - \frac{\log(1/2)}{8} \right) - 2\pi + \frac{\pi}{8} \\ &= 2\pi \left(\frac{17 \log 2}{8} - \frac{15}{16} \right) = \frac{\pi}{8} (34 \log 2 - 15)\end{aligned}$$