INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 8 (version 2)
Torsdag 29.3.2012
Alexander Kainberg

1. Verifiera med hjälp av satsen om implicita funktioner i fallet $n = 3$ att ekvationen

$$e^{xyz} = 1$$

lokalt definierar en yta i $\mathbf{R}^3$ genom punkten $(1, 1, 0)$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan i $(1, 1, 0)$.

Lösning. Låt $F(x, y, z) = e^{xyz} - 1$. Vi ser att $F(1, 1, 0) = 0$. Vi undersöker derivatorna:

$$\partial_1 F(x, y, z) = yze^{xyz} \quad \partial_2 F(x, y, z) = xze^{xyz} \quad \partial_3 F(x, y, z) = xye^{xyz}.$$

Speciellt märker vi att $\partial_3 F(1, 1, 0) = 1 \neq 0$, varav vi kan tillämpa implicita funktionssatsen. Det existerar alltså en entydig $\mathcal{C}^1$ funktion $g(x, y) : B((1, 1), r) \to \mathbf{R}$ s.a.

$$F(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \forall x, y \in B((1, 1), r).$$

Vi noterar också att $g(1, 1) = 0$. Från implicita funktionssatsen får vi också att

$$\partial_1 g(x, y) = -\frac{\partial_1 F(x, y, z)}{\partial_3 F(x, y, z)}$$

och

$$\partial_2 g(x, y) = -\frac{\partial_2 F(x, y, z)}{\partial_3 F(x, y, z)}.$$

Insättning ger att $\partial_1 g(1, 1) = 0 = \partial_2 g(1, 1)$.

Tangentplanet till ytan $r(x, y) = (x, y, g(x, y))$ i $(1, 1, 0)$ har normalen

$$n = \partial_1 r(x, y) \times \partial_2 r(x, y) = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Tangentplanet fås alltså av alla (x, y, z) som uppfyller

$$n \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 0)) = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

2. Undersök om det är möjligt att lokalt lösa ekvationssystemet

$$u = x + xyz, \quad v = y + xy, \quad w = z + 2x + 3z^2$$

som funktioner $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ då (x, y, z) är tillräckligt nära $(0, 0, 0)$. *Tips:* undersök om satsen om inversa funktioner i $\mathbf{R}^3$ kan användas.

Lösning. Vi vill undersöka funktionen

$$f(x, y, z) = (u, v, w) = (x + xyz, y + xy, z + 2x + 3z^2).$$

Om vi kan tillämpa inversa funktionssatsen hittar vi en avbildning $g : (u, v, w) \to (x, y, z)$, varav ekvationssystemet kan lösas (nära origo). Nu vill vi beräkna

$$\det f'(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 + yz & xz & xy \\ y & 1 + x & 0 \\ 2 & 0 & 1 + 6z \end{bmatrix}$$

Vi får speciellt att

$$\det f(0, 0, 0) = 1 \neq 0,$$

varav vi kan tillämpa inversa funktionssatsen.

3. Lös det optimeringsproblem som formulerades i uppgift U1 med hjälp av Lagranges metod.

Lösning. Vi vill attså lösa problemet: största värdet för arean $f(x, y) = xy$ i triangeln $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Vi börjar med att beräkna gradienten

$$\nabla f(x, y) = (y, x).$$

Vi ser att den enda kritiska punkten är $(0, 0)$, som inte duger som en lösning. Låt nu

$$A_0 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, g(x, y) = 0\},$$

där $g(x, y) = x+y-1$. Nu är $\nabla g(x, y) = (1, 1)$. Enligt Sats 3.4.2. far vi alltså att

$$(y, x) = \lambda(1, 1),$$

varav $x = y = \lambda$, och därav är (enligt villkoret för g) $x = y = 1/2$, och f antar sitt största värde i $(1/2, 1/2)$ och

$$f(1/2, 1/2) = \frac{1}{4}.$$

4. Bestäm största och minsta värdet för funktionen

$$f(x, y) = xy - y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

i mängden $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^3\}$.

Lösning. Vi börjar med att söka de kritiska punkterna till f. Vi får att

$$\nabla f(x, y) = (y, x - 1),$$

varav den enda fkitiska punkten är $(1, 0)$, var vi har att $f(1, 0) = 0$. Nu skall vi undersöka vår mängd. Det lönar sig att rita en bild av mängden. Vi kan skriva om mängden som

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^3\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x-y \leq 0 \leq x^3-y\}.$$

Låt nu $g_1(x, y) = -x - y$ och $g_2(x, y) = x^3 - y$, varav vi får att $\nabla g_1(x, y) = (-1, -1)$ och $\nabla g_2(x, y) = (3x^2, -1)$.

Vi börjar med att undersöka mängden $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, g_1(x, y) = 0\}$. Enligt Sats 3.4.2. får vi att

$$(y, x - 1) = \lambda(-1, -1),$$

Varav vi får att $y = x - 1$. g_1 ger att $-x - y = 0$, varav vi löser att $x = 1/2$ och $y = -1/2$. Vi får alltså att $f(1/1, -1/2) = 1/4$.

Nu undersöker vi mängden $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, g_2(x, y) = 0\}$. Enligt Sats 3.4.2. får vi att

$$(y, x - 1) = \lambda(3x^2, -1).$$

Nu måste vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} y & = \lambda 3x^2 \\ x - 1 & = -\lambda \\ 0 & = x^3 - y \end{cases}$$

och får lösningen $x = 3/4$ och $y = (3/4)^3$. Vi får att $f(3/4, 27/64) = -27/256$.

Det visar sig att vi måste undersöka den sista sidan. Detta gör vi genom att substituera $x = 2$. Nu får vi att $f(x, y) = 2y - y = y$. Funktionen antar sitt största värde då $y = 8$, och sitt minsta värde då $y = -2$.

5. Bestäm största och minsta värdet för funktionen

$$f(x, y) = x^3 - xy^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

i det slutna klotet $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning. Vi börjar med att undersöka de kritiska punkterna. Gradienten är

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - y^2, -2xy)$$

varav $(0, 0)$ är den enda kritiska punkten. Nu lönar det sig inte att använda Lagranges multiplikatorer, utan vi använder substitutionen $y^2 = 1 - x^2$. Vi undersöker nu funktionen

$$h(x) = x^3 - x(1 - x^2) = 2x^3 - x \quad -1 \leq x \leq 1.$$

h antar sitt största och minsta värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen:

$$h'(x) = 6x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Insättning ger att $f(1, 0) = 1$ och $f(-1, 0) = -1$, och att derivatans nollställen inte är maximi- eller minimipunkter.

6. Sök största och minsta värdet för funktionen

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

i det slutna halvplanet $\{(x, y) : y \geq 0\}$. *Tips:* observera att det finns $M \geq 1$ så att

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{1}{4}$$

för alla (x, y) med $y \geq 0$ och $x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2 \geq M^2$. Sök kritiska punkter (x, y) till f med $x^2 + y^2 < M^2, y > 0$ och jämför motsvarande $f(x, y)$ med $f(x, 0)$ då $x \in [-M, M]$.

Lösning. Vi löser uppgiften på ett alternativt sätt. Vi använder polära koordinaterna $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$, där $0 \le r \le \infty$ och $0 \le \theta \le \pi$. Vi har alltså att

$$f(r,\theta) = \frac{r(\cos\theta - \sin\theta)}{1+r^2} = \frac{r}{1+r^2}(\cos\theta - \sin\theta).$$

Genom att använda aritmetisk-geometriska[1] olikheten får vi att

$$\frac{r}{1+r^2} = \frac{\sqrt{r^2}}{1+r^2} \le \frac{1}{1+r^2}\frac{1+r^2}{2} = \frac{1}{2},$$

där likheten gäller omm $r = 1$.

Nu undersöker vi uttrycket $(\cos\theta - \sin\theta)$. I intervallets ändpunkter 0 och π antar uttrycket värden -1 och 1. Vi skall nu undersöka derivatans nollställe.

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta - \sin\theta) = -\sin\theta - \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

I $\theta = \frac{3\pi}{4}$ får $(\cos\theta - \sin\theta)$ värdet $-\sqrt{2}$.

Då vi sammanställer alla observationer får vi att då $r = 1$ och $\theta = 0$ antar f sitt största värde $f(1,0) = 1/2$. Det minsta värdet antas då $r = 1$ och $\theta = \frac{3\pi}{4}$, d.v.s. $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

[1] se t.ex. $http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality\_of\_arithmetic\_and\_geometric\_means$