INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 7
Torsdag 22.3.2012
Alexander Kainberg

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till grafen av funktionen

$$f(s,t) = st + s, \quad (s,t) \in \mathbf{R}^2,$$

i $(0,0,0)$, dvs. tangentplanet för ytan $r(s,t) = (s,t,f(s,t))$ i punkten $r(0,0)$.

Lösning. Vi undersöker ytan $r(s,t) = (s,t,st+s)$. Vi bildar de första partiella derivatorna

$$\partial_1 r(s,t) = (1,0,t+1)$$

och

$$\partial_2 r(s,t) = (0,1,s).$$

Nu är

$$\partial_1 r(s,t) \times \partial_2 r(s,t) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} = (-t-1,-s,1).$$

Tangentplanet består av de punkter (x,y,z) som uppfyller ekvationen

$$(r(0,0) - (x,y,z)) \cdot (\partial_1 r(0,0) \times \partial_2 r(0,0)) = 0$$

d.v.s

$$-(x,y,z) \cdot (-1,0,1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = z.$$

2. Verifiera att $r(\mathbf{R}^2)$ definierar en yta i $\mathbf{R}^3$, då

$$r(x,y) = (x, e^x, e^{xy}), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan i punkten $r(1,1)$.

Lösning. $r(\mathbf{R}^2)$ definierar en yta i $\mathbf{R}^3$ ty alla koordinatfunktioner är kontinuerliga. Vi bestämmer ekvationen för tangentplanet som i uppgift 1.Vi bildar de första partiella derivatorna

$$\partial_1 r(x,y) = (1, e^x, ye^{xy})$$

och

$$\partial_2 r(x,y) = (0,0,xe^{xy}).$$

Nu är

$$\partial_1 r(x,y) \times \partial_2 r(x,y) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & e^x & ye^{xy} \\ 0 & 0 & xe^{xy} \end{bmatrix} = (xe^{xy}e^x, -xe^{xy}, 0).$$

Tangentplanet består av de punkter (x,y,z) som uppfyller ekvationen

$$(r(1,1) - (x,y,z)) \cdot (\partial_1 r(1,1) \times \partial_2 r(1,1)) = 0$$

d.v.s

$$((1,e,e) - (x,y,z)) \cdot (e^2, -e, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ex = y.$$

3. Verifiera med hjälp av satsen om implicita funktioner att ekvationen

$$F(x,y) = x^4 + y^4 - 2xy = 0$$

definierar en stig $x \mapsto (x, f(x))$ i $\mathbf{R}^2$ omkring punkten $(1,1)$. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till stigen genom $(1,1)$.

Lösning. Vi noterar att $F(1,1) = 0$ och $\partial_2 F(1,1) = 2 \neq 0$. Nu finns det enligt Implicita Funktionssatsen en entydig $\mathcal{C}^1$-funktion $\phi(x)$ för vilken $\phi(1) = 1$ och som i en omgivning av $x = 1$ uppfyller $F(x, \phi(x)) = 0$. Ekvationen $x^4 + y^4 - 2xy = 0$ definierar alltså en stig $\gamma(x) = (x, \phi(x))$ i en omgivning av $(1,1)$. För derivatan gäller att

$$\phi'(x) = \frac{-\partial_1 F(x,\phi(x))}{\partial_2 F(x,\phi(x))} = \frac{-4x^3 + 2\phi(x)}{4\phi(x)^3 - 2x}.$$

I punkten $x = 1$ är tangentvektorn

$$(1,1) + t\partial_1(x, \phi(x)) = (1,1) + t(1, \frac{-2}{2}) = (1+t, 1-t),$$

där $t \in B(1,r)$. I ekvationsform är tangenten

$$x + y = 1 + t + 1 - t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 - x.$$

4. Anta att $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ är ett polynom i variablerna x, y och att $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ är en punkt, där $F(x_0, y_0) = 0$ och gradienten $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Visa att F har oändligt många nollställen (x, y), dvs. att $F(x, y) = 0$ för oändligt många par (x, y). *Tips:* Tillämpa den Implicita Funktionssatsen på F omkring (x_0, y_0).

Lösning. I.o.m. att $F(x_0, y_0) = 0$ och $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ kan vi tillämpa Implicita Funktionssatsen. Nu existerar en $\mathcal{C}^1$-funktion $\phi(x)$ s.a. $F(x, \phi(x)) = 0$ för alla $x \in B((x_0.y_0), r)$. Fullständighet ger att det finns oändligt många punkter som uppfyller $F(x, y) = 0$.

5. Beräkna Jacobis determinant $det f'(x, y, z)$ till funktionen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (x + y, xy, z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

I vilka punkter $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ är funktionen f lokalt inverterbar, dvs. Inversa Funktionssatsen kan tillämpas?

Lösning. Vi beräknar derivatans avbildningsmatris

$$f'(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{bmatrix}.$$

Nu är

$$\det f'(x, y, z) = 2xz - 2yz = 2z(x - y).$$

Enligt Inversa Funktionssatsen har funktionen en invers då $\det f'(x, y, z) = 2xz - 2yz = 2z(x - y) \neq 0$, d.v.s. då $z \neq 0$ och $x \neq y$.

6. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen mängd. Funktionen $u \in \mathcal{C}(D)$ är *harmonisk* i D om

$$D_{11}u(x, y) + D_{22}u(x, y) = 0$$

för alla $(x, y) \in D$. Visa att funktionen

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

är harmonisk i $\mathbf{R}^2$. Ge också exempel på en funktion $v \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$ som inte är harmonisk i $\mathbf{R}^2$.

Lösning. Vi verifierar att u är harmonisk genom att derivera funktionen två gånger med avseende på x och y:

$$D_{11}u(x, y) + D_{22}u(x, y) = 6x - 6x = 0$$

Ett exempel på en funktion $v \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$ som inte är harmonisk i $\mathbf{R}^2$ är t.ex. funktionen $v(x, y) = -3xy^2$, ty

$$D_{11}v(x, y) + D_{22}v(x, y) = -6x \neq 0 \ \forall \ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$