INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 6
Torsdag 15.3.2012
Alexander Kainberg

1. Bestäm tangenten i punkten $t = \pi$ till stigen $\gamma(t) = (\sin(t), \sin(t^2))$, där $t > 0$.

Lösning. Vi beräknar stigens derivata:

$$\gamma'(t) = (\cos(t), 2t\cos(t^2)).$$

I punkten $t = \pi$ är derivatan $\gamma'(\pi) = (\cos(\pi), 2\pi\cos(\pi^2)) = (-1, 2\pi\cos(\pi^2))$. Nu får tangenten från avbildningen

$$s \mapsto \gamma(\pi) + s\gamma'(\pi) = (-s, \sin(\pi^2) - s2\pi\cos(\pi^2))$$

2. Betrakta stigen $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, där $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ då $t \in [0, 2\pi]$. Verifiera att $\gamma(t)$ och $\gamma'(t)$ är vinkelräta mot varandra och att $\gamma''(t) = -\gamma(t)$ för alla $t \in [0, 2\pi]$.

Lösning. Vi deriverar:

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$$\gamma''(t) = (-\cos(t), -\sin(t)) = -\gamma(t)$$

Vi verifierar ännu ortogonaliteten genom att beräkna punktprodukten.

$$\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = (\cos t, \sin t) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0.$$

3. Låt $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$ då $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Verifiera följande fakta om funktionen f. (i) $(0, 0)$ är den enda kritiska punkten till f, (ii) $(0, 0)$ är en sträng lokal minimumpunkt till f, och (iii) $f(1, y) \to -\infty$ då $y \to -\infty$.

Lösning.

(i) Vi söker de kritiska punkterna.

$$\nabla f(x,y) = (2x(1+y)^3, 3x^2(1+y)^2 + 2y) = (0,0).$$

Den första ekvationen ger att $x = 0$ eller $y = -1$ och den andra ekvationen ger att $y = -1$ inte är en möjlig lösning, varav $(x,y) = (0,0)$ är den enda kritiska punkten.

(ii) Vi beräknar de högre derivatorna.

$$\partial_1\partial_1 f = 2(1+y)^3, \quad \partial_1\partial_2 f = 6x(1+y)^2 \quad \partial_2\partial_2 f = 6x^2(y+1) + 2$$

Hessematrisen blir nu (i punkten $(0,0)$)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0$$

och $\partial_1\partial_1 f(0,0) = 2 > 0$ varav den kvadratiska formen är positivt definit och $(0,0)$ är en lokal minimipunkt.

(iii)

$$f(1,y) = (1+y)^3 + y^2 = y^3 + 4y^2 + 3y + 1 \to -\infty \text{ då } y \to -\infty.$$

4. Bestäm största och minsta värdet till $f(x,y) = x^2 - y^3$ i den slutna cirkelskivan $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. (Varför finns de största och minsta värdena i detta fall?) *Tips:* sök eventuella lokala extremvärden till f i $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ och jämför med minimum och maximum för $f(x,y)$ på cirkeln $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. För detta studera $h(y) = -y^3 + 1 - y^2$ där $y \in [-1,1]$ (dvs. substituera $x^2 = 1 - y^2$ i uttrycket för $f(x,y)$).

Lösning. I.o.m. att A är kompakt och icke-tom, och f är kontinuerlig finns åtminståne en maximi- och minimipunkt (Sats 2.9.17). Vi börjar med att undersöka innerpunkterna genom att söka de kritiska punkterna.

$$\nabla f(x,y) = (2x, -3y^2) = (0,0)$$

ger att origo är den enda kritiska punkten. Självfallet är origo ingen extremvärdespunkt, ty t.ex. $f(0,1) = -1$ och $f(1,0) = 1$, medan $f(0,0) = 0$.

Nu undersöker vi randen. Detta kan man även göra med Lagranges multiplikatorer, men det är tidskrävande. Vi följer tipset. Vi studerar funktionen $h(y) = -y^3 + 1 - y^2$ där $y \in [-1, 1]$. h antar sitt största/minsta värde i intervallets ändpunkter eller i derivatans nollställen. Vi undersöker ändpunkterna: $h(-1) = 1$ och $h(1) = -1$. Nu undersöker vi derivatans nollställen.

$$h'(y) = -3y^2 - 2y = -y(3y+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ eller } y = \frac{-2}{3}.$$

Nu har vi fått fyra punkter som vi måste undersöka: $(1,0)$,$(-1,0)$,$(\sqrt{5}/3, -2/3)$ och $(-\sqrt{5}/3, -2/3)$.

$$f(1,0) = f(-1,0) = 1 \quad \text{och} \quad f(\sqrt{5}/3, -2/3) = f(-\sqrt{5}/3, -2/3) = \frac{5}{9} + \frac{8}{27} = \frac{23}{27}.$$

Detta ger att f antar sitt maximivärde i punkterna $(1,0)$,$(-1,0)$ och $(0,-1)$, och sitt minimivärde i punkten $(0,1)$.

5. Definiera funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ med $f(0,0) = 0$ och

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Verifiera följande fakta om funktionen f. (i) $D_1 f(0,y) = -y$ då $y \neq 0$ och $D_2 f(x,0) = x$ då $x \neq 0$ (derivera $f(x,y)$ partiellt då $(x,y) \neq (0,0)$), (ii) $D_1 f(0,0) = 0 = D_2 f(0,0)$ (använd definitionen), (iii) $D_{12} f(0,0) \neq D_{21} f(0,0)$ (använd definitionen samt (i) och (ii)). *Kommentar:* Uppgiften visar att Sats 2.8.3 inte gäller allmänt.

Lösning.

(i) Vi derivarar funktionen.

$$D_1 f(x,y) = \frac{(3yx^2 - y^3)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{(x^3 - 3y^2 x)(x^2 + y^2) - 2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Insättning ger $D_1 f(0,y) = -y$ och $D_2 f(x,0) = x$.

(ii)

$$D_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$D_2(0,0)$ beräknas på helt motsvarande sätt.

(iii) (i) och (ii) ger att

$$D_{12}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0)-D_2f(0,0)}{h} = 1$$

och

$$D_{21}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1f(0,h)-D_1f(0,0)}{h} = -1.$$

6. Anta att $f : A \to \mathbf{R}$ tillhör klassen $\mathcal{C}^3$, där $A \subset \mathbf{R}^2$ är en öppen mängd. Anta att $(x,y) \in A$ är en kritisk punkt till f för vilken motsvarande kvadratiska form

$$Q(h,k) = D_{11}f(x,y)h^2 + 2D_{12}f(x,y)hk + D_{22}f(x,y)k^2, \quad (h,k) \in \mathbf{R}^2,$$

är indefinit. Visa att (x,y) är en sadelpunkt till f, dvs. (x,y) är varken en lokal maximum- eller en lokal minimumpunkt till f.
Komplettera följande skiss: låt $Q(h_1,k_1) > 0$ och $Q(h_2,k_2) < 0$. Visa att $f(x+th_1, y+tk_1) > f(x,y)$ då $0 < t < c_1$ och $f(x+th_2, y+tk_2) < f(x,y)$ då $0 < t < c_2$ (där $c_1, c_2 > 0$ är tillräckligt små), genom att analysera Taylors polynom av andra ordningen till f i punkten (x,y) (se Sats 2.8.4).

Lösning. Eftersom $f \in \mathcal{C}^3$ har funktionen en Taylorutveckling kring den kritiska punkten (x,y):

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{2}Q(h,k) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k). \tag{1}$$

Om Q är indefinit existerar en punkt (h_1,k_1) s.a. $Q(h_1,k_1) > 0$, och en annan punkt (h_2,k_2) s.a. $Q(h_2,k_2) < 0$. Insättning av $(x+th_1, y+tk_1)$ i (1) ger

$$\begin{aligned} f(x+th_1, y+tk_1) &= f(x,y) + \frac{1}{2}Q(th_1,tk_1) + ((th_1)^2+(tk_1)^2)^{3/2}B(th_1,tk_1) \\ &= f(x,y) + \underbrace{t^2}_{>0}(\underbrace{\frac{1}{2}Q(h_1,k_1)}_{>0} + \underbrace{t(h_1^2+k_1^2)^{3/2}}_{>0}B(th_1,tk_1)), \end{aligned}$$

varav $f(x+th_1, y+tk_1) > f(x,y)$ då t är tillräkligt litet (fundera varför det är så!).

På motsvarande sätt får vi $f(x+th_2, y+tk_2) < f(x,y)$ då t är tillräkligt litet. Detta innebär att f antar större och mindre värden än $f(x,y)$ i varje omgivning av (x,y), varav (x,y) inte är en maximi- eller minimipunkt.