

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Vektoranalys

Räkneövning 5

Torsdag 23.2.2012

Alexander Kainberg

1. Bestäm de kritiska punkterna till funktionen $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, då

$$f(x, y, z) = x^4 - 3xy^3 + 3xz + 2, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Lösning. Vi löser ekvationen $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$:

$$\nabla f(x, y, z) = (4x^3 - 3y^3 + 3z, -9xy^2, 3x) = (0, 0, 0).$$

Ur den sista koordinatfunktionen får vi att $x = 0$ och ur den första får vi att $z = y^3$.

2. Bestäm Taylors polynom av andra ordningen till f omkring $(0, 0)$, där

$$f(x, y) = e^{x+y} \cos(xy), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Lösning. Vi börjar med att notera att $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$, varav $\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$. Nu beräknar vi alla derivator:

$$\partial_1 f = e^{x+y} \cos(xy) - e^{x+y} \sin(xy)y = e^{x+y}(\cos(xy) - y \sin(xy))$$

$$\partial_2 f = e^{x+y} \cos(xy) - e^{x+y} \sin(xy)x = e^{x+y}(\cos(xy) - x \sin(xy))$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_1 f &= e^{x+y}(\cos(xy) - y \sin(xy)) - (e^{x+y} \sin(xy)y + e^{x+y} \cos(xy)y^2) \\ &= e^{x+y}((1 - y^2) \cos(xy) - 2y \sin(xy)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_2 f &= e^{x+y}(\cos(xy) - x \sin(xy)) - (e^{x+y} \sin(xy)x + e^{x+y} \cos(xy)x^2) \\ &= e^{x+y}((1 - x^2) \cos(xy) - 2x \sin(xy)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2 f &= e^{x+y}(\cos(xy) - x \sin(xy)) - e^{x+y}(\sin(xy)y + \sin(xy) + \cos(xy)yx) \\ &= e^{x+y}((1 - xy) \cos(xy) - (x + y + 1) \sin(xy)) = \partial_2 \partial_1 f \end{aligned}$$

Insättning ger att $f(0,0) = \partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = \partial_1 \partial_1 f(0,0) = \partial_2 \partial_2 f(0,0) = \partial_1 \partial_2 f(0,0) = \partial_2 \partial_1 f(0,0) = 1$.

Sats 2.8.4. ger att

$$f(h,k) = 1 + h + k + \frac{1}{2}(h^2 + k^2 + 2hk) + (h^2 + k^2)^{3/2}B(h,k)$$

där $B(h,k)$ är en begränsad funktion i något klot $B(0,r)$, $r > 0$.

3. Bestäm den kvadratiske form $Q(h,k)$ som svarar mot funktionerna

(i) $f(x,y) = -x^2 - y^4$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

(ii) $g(x,y) = -x^2 - y^3$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

i den kritiska punkten $(0,0)$. Undersök direkt om $(0,0)$ en lokal extremvärdepunkt till f eller g . (Obs. Kvadratiske formen Q kan inte användas.)

Lösning.

(i)

$$\partial_1 f = -2x \quad \partial_2 f = -4y^3$$

$$\partial_1 \partial_1 f = -2 \quad \partial_1 \partial_2 f = 0 \quad \partial_2 \partial_2 f = -12y^2$$

Vi får nu att $Q(h,k) = -2h^2 - 12y^2k^2$, och i origo är $Q(h,k) = -2h^2$.

Vi ser att $f(x,y) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, varav $(0,0)$ är en maximipunkt.

(ii)

$$\partial_1 f = -2x \quad \partial_2 f = -3y^2$$

$$\partial_1 \partial_1 f = -2 \quad \partial_1 \partial_2 f = 0 \quad \partial_2 \partial_2 f = -6y$$

Vi får alltså att $Q(h,k) = -2h^2$, d.v.s. samma som i föregående fall.

Origo är en sadelpunkt. Vi ser att $g(x,0)$ beter sig som en parabel och $g(0,y)$ är ett tredjegradspolynom, varav det är lätt att övertyga sig själv att det faktiskt är en sadelpunkt.

4. Bestäm de lokala extremvärdepunkterna till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

samt analysera deras typ.

Lösning. Vi söker de kritiska punkterna.

$$\nabla f(x, y) = (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) = (2x + y + 1, x + 2y - 1) = (0, 0),$$

varav $(-1, 1)$ är den enda kritiska punkten. Nu skall vi se hurudan karaktär den kritiska punkten har. Vi beräknar de andra derivatorna:

$$\partial_1 \partial_1 f = 2 \quad \partial_1 \partial_2 f = 1 \quad \partial_2 \partial_2 f = 2$$

Hessematrisen blir nu

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0,$$

och $\partial_1 \partial_1 f = 2 > 0$, varav den kvadratiska formen är positivt definit varav $(-1, 1)$ är ett lokalt minimum.

5. Sök de lokala extremvärdespunkterna till funktionen

$$f(x, y) = x^5 y + x y^5 + xy, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

samt analysera deras typ.

Lösning. Vi söker de kritiska punkterna.

$$\nabla f(x, y) = (5x^4 y + y^5 + y, x^5 + 5xy^4 + x) = (y \underbrace{(5x^4 + y^4 + 1)}_{>0}, x \underbrace{(x^4 + 5y^4 + 1)}_{>0})$$

Detta innebär att $(0, 0)$ är den enda kritiska punkten. Nu skall vi se hurudan karaktär den kritiska punkten har. Vi beräknar de andra derivatorna:

$$\partial_1 \partial_1 f = 20x^3 y \quad \partial_1 \partial_2 f = 5x^4 + 5y^4 + 1 \quad \partial_2 \partial_2 f = 20xy^3$$

Hessematrisen blir nu (i origo)

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & +0 \end{bmatrix} = -1 < 0,$$

varav den kvadratiska formen är indefinit och punkten $(0, 0)$ är en sadelpunkt.

6. Låt $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ vara funktionen

$$f(x, y) = \sin(x + y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Visa: (i) varje (x, y) på de parallella linjerna $y = -x + \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, är kritiska punkter till f , (ii) motsvarande kvadratiska former Q är endera positivt eller negativt semidefinita, (iii) varje punkt $(x, -x + \frac{\pi}{2} + n\pi)$ är en lokal maximumpunkt till f för jämna n och en lokal minimumpunkt för udda n (använd sinusfunktionens egenskaper!).

Lösning.

(i) Vi söker de kritiska punkterna.

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x + y), \cos(x + y))$$

Vi ser att

$$\cos(x + y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

(ii) Vi beräknar andra derivatorna:

$$\partial_1 \partial_1 f = \partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_2 f = -\sin(x + y).$$

Hessematrixens determinant blir

$$\det \begin{bmatrix} -\sin(x + y) & -\sin(x + y) \\ -\sin(x + y) & -\sin(x + y) \end{bmatrix} = \sin^2(x + y) - \sin^2(x + y) = 0$$

vilket innebär att kvadratiska formerna är semidefinita.

(iii) Vi undersöker funktionen f i de kritiska punkterna:

$$f(x, y) = \sin(x + y) = \sin(x - x + \frac{\pi}{2} + n\pi) = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi).$$

Sinusfunktionens egenskaper ger att $f = 1$ då $n = \dots - 2, 0, 2, \dots$ och $f = -1$ då $n = \dots - 1, 1, 3, \dots$