INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 4
Torsdag 16.2.2012
Alexander Kainberg

1. Verifiera att vektorfunktionen

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \quad f(x, y) = (x^2 y, e^{-xy}, x + y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

är deriverbar i $\mathbf{R}^2$, och bestäm derivatan $f'(x, y)$ som en avbildningsmatris.

Lösning. Låt $f(x, y) = (x^2 y, e^{-xy}, x+y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$ Vi bildar avbildningsmatrisen:

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ -ye^{-xy} & -xe^{-xy} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Varje koordinatfunktion är kontinuerlig och definierad överallt, varav f är deriverbar i $\mathbf{R}^2$.

2. Låt $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning. Visa att A är deriverbar i varje punkt $x \in \mathbf{R}^m$, och bestäm derivatan $A'(x)$. *Tips:* utgå från definitionen och tillämpa lineariteten av A på uttrycket $A(x + h) - A(x)$.

Lösning. Vi vet att vår linjära avbildning A är en $m \times n$ matris, och att $A(x) = A \cdot x$, där $x \in \mathbf{R^m}$. Definitionen av deriverbarhet ger att

$$A(x + h) = A(x) + A'(x) \cdot h + \underbrace{|h|\varepsilon(h)}_{=0},$$

varav

$$A(x + h) = A(x) + A'(x) \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad A(x + h) - A(x) = A'(x) \cdot h.$$

Lineariteten ger att

$$A(x + h) - A(x) = A(x) + A(h) - A(x) = A(h) = A \cdot h = A'(x) \cdot h,$$

vilket innebär att $A'(x) = A \ \forall x \in \mathbf{R^m}$.

3. Bestäm avbildningsmatrisen $(f \circ g)'(\pi, 0)$ i punkten $(\pi, 0)$ för den sammansatta funktionen $f \circ g$ med hjälp av kedjeregeln, då $f(x,y) = (e^y, xy)$ och $g(x,y) = (\sin(x), \sin(xy))$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Lösning. Enligt kedjeregeln är

$$(f \circ g)'(x,y) = f'(g(x,y))g'(x,y).$$

Vi bildar avbildningsmatriserna för $f'(x,y)$ och $g'(x,y)$:

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^y \\ y & x \end{bmatrix},$$

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) & 0 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{bmatrix}.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(\pi, 0) &= \begin{bmatrix} 0 & e^{\sin(0)} \\ \sin(0) & \sin(\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi) & 0 \\ 0\cos(0) & \pi\cos(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Höjden i terrängen i punkten (x,y) satisfierar

$$h(x,y) = \frac{10}{3 + x^2 + y^2}.$$

En bäck rinner genom punkten $(3,2)$. Bestäm bäckens riktning i denna punkt. (Vatten rinner nedåt i den brantaste riktningen från en punkt.)

Lösning. $\nabla f(x_0)$ anger riktningen i vilken f växer snabbast i punkten x_0. Detta innebär att $-\nabla f(x_0)$ är riktningen i vilken f avtar snabbast i punkten x_0. Vi tillämpar detta på vårt problem:

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{-2x \times 10}{(3 + x^2 + y^2)^2}, \frac{-2y \times 10}{(3 + x^2 + y^2)^2} \right),$$

varav

$$-\nabla h(3,2) = \left(\frac{60}{16^2}, \frac{40}{16^2} \right),$$

vilket innebär att bäcken rinner i riktningen $(3, 2)$.

5. Bilda de högre partiella derivatorna $D_{22}f$, $D_{21}f$ och $D_{12}f$ till funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som definieras av $f(x, y) = \sin(xy)\cos(x)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Lösning. Det är bara att räkna, vi börjar med att räkna de första derivatorna:

$$D_1 f(x, y) = y\cos(xy)\cos(x) - \sin(xy)\sin(x),$$
$$D_2 f(x, y) = x\cos(xy)\cos(x).$$

Nu deriverar vi dessa för att få $D_{22}f$, $D_{21}f$ och $D_{12}f$:

$$D_{22}f = D_2(D_2 f(x, y)) = -x^2\cos(x)\sin(xy),$$
$$D_{21}f = D_2(D_1 f(x, y)) = \cos(xy)\cos(x) - yx\cos(x)\sin(xy) - x\sin(x)\cos(xy),$$
$$D_{12}f = D_1(D_2 f(x, y)) = \cos(xy)\cos(x) + x\left(-\sin(x)\cos(xy) - y\cos(x)\sin(xy)\right).$$

Vi märker att $D_{21}f = D_{12}f$. Detta är inget sammanträffande, utan $D_{21}f = D_{12}f$ gäller då $f \in C^2(\mathbf{R}^{\mathbf{2}})$.

6. Anta att funktionen $f : A \to \mathbf{R}^2$ är deriverbar i A, där $A \subset \mathbf{R}^2$ är en öppen mängd. Låt $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in A$ vara en stig så att derivatorna x' och y' är kontinuerliga i intervallet Δ, och $f(\gamma(t)) = C$ för alla $t \in \Delta$, där C är en konstant. (Dvs. $\gamma(t)$ tillhör en fixerad nivåkurva till f.) Visa att

$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0, \quad t \in \Delta.$$

Tips: tillämpa kedjeregeln på avbildningen $t \mapsto (f \circ \gamma)(t) = C$. (Avsikten med uppgiften är att arbeta igenom beviset till Sats 2.7.5 i kompendiet, som inte behandlades på föreläsningarna.)

Lösning. Vi börjar med att notera att

$$f(x(t), y(t)) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t) = c \qquad \forall t \in \Delta.$$

Ur detta kan vi beräkna derivatan

$$(f \circ \gamma)'(t) = 0.$$

Å andra sidan har vi enligt kedjeregeln att

$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)),$$

varav

$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0 \qquad \forall t \in \Delta.$$