INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 3
Torsdag 9.2.2012
Alexander Kainberg

1. Ge exempel på en funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ för vilken den partiella derivatan $D_2 f(x, y) = 0$ för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, men f är inte kontinuerlig i $\mathbf{R}^2$. (Kom ihåg: $D_2 f$ beräknas på linjer parallella med y-axeln.)

Lösning. Villkoret $D_2 f(x, y) = 0$ för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ger att funktionen $f(x, y)$ skall vara konstant med avseende på y, d.v.s. $f(x, y) = g(x)$. Nu gäller det bara att välja $g(x)$ så att den är diskontinuerlig i minst en punkt i $\mathbf{R}^2$. T.ex.

$$f(x, y) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \in \mathbf{Q}, \\ 1 & \text{om } x \in \mathbf{R}/\mathbf{Q}. \end{cases}$$

Vi visar nu att vår funktion har $D_2 f(x, y) = 0$.

$$\partial_2 f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R^2}.$$

Vi visar ännu noggrant att f inte är kontinuerlig: Låt $(x_1, y_1) \in \mathbf{R^2}$. Välj $u_i \in \mathbf{Q}$ och $v_i \in \mathbf{R}/\mathbf{Q}$ så att $u_i \to x_1$ och $v_i \to x_1$. Nu gäller det att

$$(u_i, y_1) \to (x_1, y_1) \qquad \text{och} \qquad (v_i, y_1) \to (x_1, y_1),$$

men

$$f(u_i, y_1) \to 0 \qquad \text{och} \qquad f(v_i, y_1) \to 1,$$

varav f inte har något gränsvärde, varav f inte är kontinuerlig.

2. Beräkna gradienten av funktionen $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$,

$$f(u) = \|u\|^{\|u\|} = e^{\|u\| \log \|u\|}, \quad u \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Lösning. Vi beräknar $\partial_1 f(u) = \partial_1 e^{\sqrt{x^2+y^2} \log \sqrt{x^2+y^2}}$:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u) = e^{\sqrt{x^2+y^2} \log \sqrt{x^2+y^2}} (& \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \log \sqrt{x^2 + y^2} \\ & + \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \\ & = \|u\|^{\|u\|} \frac{x}{\|u\|} (\log \|u\| + 1) = x \|u\|^{\|u\| - 1} (\log \|u\| + 1). \end{aligned}$$

$\partial_2 f(u)$ räknar man på samma sätt, varav

$$\begin{aligned}\nabla f(u) &= (\partial_1 f(u), \partial_2 f(u)) = (x\|u\|^{\|u\|-1}(\log\|u\|+1), y\|u\|^{\|u\|-1}(\log\|u\|+1)) \\ &= \|u\|^{\|u\|-1}(\log\|u\|+1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Visa att funktionen f, definierad av $f(0,0) = 0$ och

$$f(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

är deriverbar i $(0,0)$.

Lösning. Vi börjar med att beräkna de partiella derivatorna:

$$\partial_1 f(x,y) = \partial_1 y^3(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{y^3(\frac{-1}{2})2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y^3 x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

och

$$\partial_f(x,y) = \frac{3y^2\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^4}{(x^2+y^3)^{3/2}}.$$

Vi vill nu visa att f är deriverbar genom att visa att $f \in C^1(\mathbf{R^2})$. Det gäller nu att visa att de partiella derivatorna existerar och är kontinuerliga överallt. Det är klart att de är kontinuerliga, och att de existerar (vi sätter $f'(0,0) = (0,0)$), överallt, men vi måste granska origo skillt. Vi gör detta genom att använda polära koordinater. vi får

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{y^3 x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \sin^3\theta\cos\theta}{r^3} = 0,$$

och

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^4}{(x^2+y^3)^{3/2}} = \lim_{r\to 0} \frac{3r^2\sin^2\theta}{r} - \frac{r^4\sin^4\theta}{r^3} = 0 - 0 = 0.$$

4. Verifiera på basen av Sats 2.5.1 att att funktionen $f(x) = e^{-\|x\|^2}, x \in \mathbf{R}^n$, är deriverbar i $\mathbf{R}^n$.

Lösning. Det gäller att visa att $f \in C^1(\mathbf{R^2})$. Vi beräknar en partiell derivata (alla andra är identiska):

$$\partial_i f(x) = \partial_i e^{-(x_1^2+\cdots+x_i^2+\cdots+x_n^2)} = -2x_i e^{-\|x\|^2}.$$

Denna är definierad och kontinuerlig överallt, varav f är deriverbar i $\mathbf{R^n}$.

5. Anta att $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ satisfierar $\nabla f(x,y) = (0,0)$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Visa att f är en konstant funktion. *Tips.* Rör dig från $(0,0)$ till en godtycklig punkt (x,y) längs en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna (jämför med beviset till Sats 2.5.1).

Lösning. Vi använder oss av tipset. Nu gäller att

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - f(0,y) + f(0,y) - f(0,0).$$

Med ett fixerat y är funktionen $\phi(t) = f(t,y) - f(0,y)$ definierad då $0 \le t \le x$ och då är funktionen även deriverbar, eftersom $\phi'(t) = \partial_1 f(t,y)$. Medelvärdessatsen (i intervallet $(0,x)$) ger att

$$f(x,y) - f(0,y) = \phi(x) - \phi(0) = \phi'(\varrho)(x-0) = \partial_1 f(\varrho, y)x.$$

Helt identiskt får vi

$$f(0,y) - f(0,0) = \partial_2 f(0,\theta)y.$$

Genom att kombinera våra upptäkter får vi

$$f(x,y) - f(0,0) = \partial_1 f(\varrho,y)x + \partial_2 f(0,\theta)y = \underbrace{(\partial_1 f(\varrho,y), \partial_2 f(0,\theta))}_{=(0,0)} \cdot (x,y) = 0.$$

Detta ger att

$$f(x,y) - f(0,0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R^2}.$$

Detta betyder förstås att f är konstant.

6. Låt $w(x,y) = (e^{x-y}, e^{xy})$ och

$$h(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

då $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Bilda den sammansatta funktionen $h \circ w$. Beräkna de partiella derivatorna $D_1(h \circ w)$ och $D_2(h \circ w)$ med hjälp av kedjeregeln.

Lösning. Vi följer Exempel 2.6.8. Vi börjar med att bilda funktionen:

$$(h \circ w)(x, y) = h(w(x, y)) = h(e^{x-y}, e^{xy}) = \frac{(e^{x-y})^2 - (e^{xy})^2}{(e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2} = \frac{e^{2x-2y} - e^{2xy}}{e^{2x-2y} + e^{2xy}}.$$

Med kedjeregeln får vi

$$(h \circ w)'(x, y)a = \nabla(h \circ w)(x, y) \cdot a,$$

där $a \in \mathbf{R^2}$. Avbildningsmatrisen $w'(x, y)$ är

$$w'(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_1 w_1(x, y) & \partial_2 w_1(x, y) \\ \partial_1 w_2(x, y) & \partial_2 w_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{bmatrix}$$

Genom att tillämpa (2.6.5) på h får vi

$$h'(x, y)a = \nabla h(x, y) \cdot a = (\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{4xy^2a_1}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4x^2ya_2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Nu har vi att

$$\begin{aligned} h'(w(x, y))w'(x, y)a = h'(w(x, y))(w'(x, y)a) &= (\frac{4e^{x-y}(e^{xy})^2}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2}, -\frac{4(e^{x-y})^2(e^{xy})}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2}) \\ &\times \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= (\frac{4e^{x-y}(e^{xy})^2}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2}, -\frac{4(e^{x-y})^2(e^{xy})}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2}) \begin{pmatrix} e^{x-y}(a_1 - a_2) \\ e^{xy}(ya_1 + xa_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{4(e^{x-y})^2(e^{xy})^2(a_1 - a_2)}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2} - \frac{4(e^{x-y})^2(e^{xy})^2(ya_1 + xa_2)}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2} \\ &= \frac{a_1(4(e^{x-y})^2(e^{xy})^2(1 - y) - a_2 4(e^{x-y})^2(e^{xy})^2(1 + x)}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2} \\ &= (\frac{4(e^{x-y})^2(e^{xy})^2(1 - y)}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2}, \frac{-4(e^{x-y})^2(e^{xy})^2(1 + x)}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2}) \cdot (a_1, a_2) \end{aligned}$$

Detta innebär att

$$D_1(h \circ w)(x, y) = \frac{4(e^{x-y})^2(e^{xy})^2(1 - y)}{((e^{x-y})^2 + (e^{xy})^2)^2}$$

och

$$D_2(h \circ w)(x,y) = \frac{-4(e^{x-y})^2(e^{xy})^2(1+x)}{((e^{x-y})^2+(e^{xy})^2)^2}.$$

Det lönar sig att tänka noggrant på om man vill använda denna metod, eller beräkna partiella derivatorna genast.