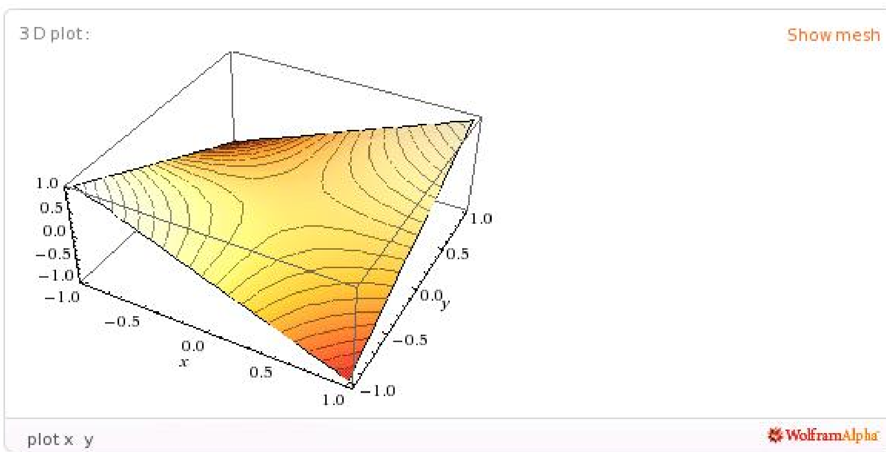
INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 2
Torsdag 2.2.2012
Alexander Kainberg

1. Skissera nivåkurvorna hos funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = xy, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

dvs. identifiera mängderna $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy = c\}$ för olika värden på $c \in \mathbf{R}$.

Lösning. Då man sätter in funktionen i t.ex. Wolfram alpha får vi något sådant:



2. Visa att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + 2x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

genom att introducera polära koordinater $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, där $\varphi \in [0, 2\pi)$ och $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lösning. Vi använder oss av de polära koordinaterna.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + 2x^2y}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\varphi r^2\sin^2\varphi + r\sin\varphi r^2\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos\varphi\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi)}{r^2(\sin^\varphi + \cos^2\varphi)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 f(x)}{r^2} \overset{(*)}{=} 0$$

$(*)$ $f(x)$ är en begränsad funktion.

3. Är det möjligt att definiera $g(0,0)$ så att funktionen g är kontinuerlig i origo $(0,0)$, då

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}?$$

Lösning. Nej, vi undersöker följderna $(0,t)$ och $(t,0)$ då $t \to 0$.

$$\lim_{(t,0)\to(0,0)} \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = \lim_{(t,0)\to(0,0)} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

$$\lim_{(0,t)\to(0,0)} \frac{0^2 - t^2}{0^2 + t^2} = \lim_{(0,t)\to(0,0)} \frac{-t^2}{t^2} = -1$$

I.o.m. att gränsvärdet varierar, beroende på varifrån vi närmar oss origo kan vi inte definiera $g(0,0)$ så att g är kontinuerlig i origo.

4. Låt

$$g(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Verifiera att funktionen g är kontinuerlig i $\mathbf{R}^n$ genom att lämpligen använda allmänna räkneregler och faktan om kontinuitet (som antas vara kända).

Lösning.

$$g(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} = \frac{1}{1 + x_1 \cdot x_1 + \cdots + x_n \cdot x_n} = \frac{1}{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$g(x)$ är definierad överallt, varav vi inser att

$$g(x) \to \frac{1}{1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2} \quad \text{då } x \to (y_1, \ldots y_n),$$

vilket innebär att funktionen är kontinuerlig (se t.ex. kompendiet s.14).

5. Beräkna de partiella derivatorna $D_1 f(x,y,z)$, $D_2 f(x,y,z)$ och $D_3 f(x,y,z)$, då

$$f(x,y,z) = e^x \cos(x + y + z) + y \sin(z), \quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3.$$

Lösning. Vi räknar:

$$D_1 f(x, y, z) = e^x \cos(x + y + z) - e^x \sin(x + y + z)$$

$$D_2 f(x, y, z) = -e^x \sin(x + y + z) + \sin(z)$$

$$D_2 f(x, y, z) = -e^x \sin(x + y + z) + y \cos(z)$$

6. Sök de partiella derivatorna $D_1 f(x, y)$ och $D_2 f(x, y)$ till funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som definieras av

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Obs: punkten $(x, y) = (0, 0)$ bör betraktas separat på basen av definitionen av de partiella derivatorna.

Lösning. Vi börjar med att beräkna derivatorna.

$$D_1 f(x, y) = D_1 \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

På motsvarande får vi att

$$D_2 f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Nu skall vi undersöka derivatorna i punkten $(0, 0)$. Detta gör vi genom derivatans definition (se kompendiet s.16).

$$\partial_1 f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \pm 1,$$

beroende på om h är positiv eller negativ. Detta innebär att $f'(0, 0)$ inte existerar.