INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 11
Torsdag 26.4.2012
Alexander Kainberg

1. Låt A vara cylindern $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, där $R > 0$ och $h > 0$ är givna. Beräkna trippelintegralen

$$\int_A z(x^2+y^2)dxdydz.$$

Lösning. Vi får att

$$\int_A z(x^2+y^2)dxdydz = \int_{A'}\int_0^h z(x^2+y^2)dzdydx = \frac{h^2}{2}\int_{A'}(x^2+y^2)dydx$$

där $A' = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R\}$. Nu gör vi ett variabelbyte till polära koordinater. Vi får att

$$\begin{aligned}\int_A z(x^2+y^2)dxdydz &= \frac{h^2}{2}\int_{A'}(x^2+y^2)dydx = \frac{h^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 dr d\varphi \\ &= \frac{\pi h^2 R^4}{4}.\end{aligned}$$

2. Bestäm volymen av ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1$ genom att reducera detta till enhetssfären i $\mathbf{R}^3$ med det linjära variabelbytet $w(x,y,z) = (ax, by, cz)$.

Lösning. Låt $A = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ och låt $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Vi beräknar jacobianen för variabelbytet:

$$\det w' = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc.$$

Nu får vi enligt Sats 4.5.2 att

$$V_{ellipsoid} = \int_A dxdydz = abc\int_B dxdydz.$$

Nu kan vi antingen kolla hur man räknar volymen för ett klot från tabellboken, men det är roligare om vi räknar själv. Vi ser från exempel 5.2.2 att jacobianen är $r^2 \sin\theta$ där $r \le 1$, $\theta \in [0, \pi]$ och $\varphi \in [0, 2\pi]$. Nu får vi att

$$\begin{aligned}\int_B dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 2\pi \left(\Big/_0^{\pi} - \cos\theta \right) \left(\Big/_0^1 \frac{r^3}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3},\end{aligned}$$

varav

$$V_{ellipsoid} = \frac{4\pi abc}{3}.$$

3. Låt $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara vektorfältet $F(x, y) = (x^2, y)$ och $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ vara stigen $\gamma(t) = (t, t^2)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma F \cdot ds.$$

Lösning. Enligt definitionen är

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot ds &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 F(t, t^2) \cdot (1, 2t) dt \\ &= \int_0^1 (t^2, t^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^3) dt \\ &= \Big/_0^1 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2} \right) = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

4. Låt $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara vektorfältet $F(x, y) = (y^2, -x)$ och $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$ då $t \in [0, 2\pi]$, där $R > 0$ är fixerad. Beräkna

$$\oint_\gamma F \cdot ds$$

med hjälp av Greens formel.

Lösning. Vi noterar att stigen γ är en origocentrerad cirkel med radien R. Enligt Greens formel får vi nu att

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma F \cdot ds &= \int\int_{B(0,R)} (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dxdy = \int\int_{B(0,R)} (-1-2y) dydx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R (-1 - 2r\sin\varphi) r dr d\varphi = -\pi R^2 - \int_0^{2\pi}\int_0^R 2r^2 \sin\varphi dr d\varphi \\
&= -\pi R^2 - 2\left(\Big/_0^{2\pi} - \cos\varphi\right)\left(\Big/_0^R \frac{r^3}{3}\right) = -\pi R^2.
\end{aligned}$$

5. Låt $r(D)$ vara ytan $r(\varphi, t) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, t)$, där $(\varphi, t) \in D = (0, 2\pi) \times (0, 1)$. Skissera $r(D)$ och bestäm arean av ytan $r(D)$.

Lösning. Skissen gås igenom på räkneövningen. Det går att rita ytan med t.ex. Wolfram Alpha.

Vi bestämmer nu arean.

$$area(r(D)) = \int\int_D |\partial_1 r(\varphi, t) \times \partial_2 r(\varphi, t)| d\varphi dt$$

Vi får att

$$\partial_1 r(\varphi, t) \times \partial_2 r(\varphi, t) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -t\sin\varphi & t\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{bmatrix} = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, -t),$$

varav

$$|\partial_1 r(\varphi, t) \times \partial_2 r(\varphi, t)| = \sqrt{t^2\sin^2\varphi + t^2\cos^2\varphi + t^2} = t\sqrt{2}.$$

Nu får vi alltså att

$$\begin{aligned}
area(r(D)) &= \int\int_D |\partial_1 r(\varphi, t) \times \partial_2 r(\varphi, t)| d\varphi dt = \sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} t d\varphi dt \\
&= \pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

6. Låt $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$. Bestäm totalflödet

$$\int\int_{\partial D} F \cdot n dS$$

av vektorfältet $F(x,y,z) = (x,y,z)$ genom ytan ∂D med hjälp av divergenssatsen. Här är $n(x,y)$ den normerade ytternormalen till ∂D i motsvarande punkt.

Lösning. Enligt Gauss sats får vi att

$$\begin{aligned}\int\int_{\partial D} F \cdot n dS &= \int\int\int_D \nabla \cdot F dxdydz = \int\int\int_D (1+1+1) dxdydz \\ &= 3\int\int\int_D dxdydz = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r dr d\varphi = 3\pi.\end{aligned}$$