INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 10
Torsdag 19.4.2012
Alexander Kainberg

1. Låt $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. Beräkna integralen

$$I = \int\int_A (x + y)dxdy$$

med variabelbytet $(x, y) = w(u, v) = (u+v, u-v)$. Kontrollera svaret genom att alternativt beräkna I direkt som en itererad integral.

Lösning. Vi börjar med att söka den inversa funktionen $w^{-1} : A' \mapsto A$. Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} u &= x + y \\ v &= x - y \end{cases}$$

och får att

$$w^{-1}(x, y) = (\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}) = (u, v).$$

Nu vill vi beräkna

$$\det w'(x, y) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2.$$

Vi vill ännu veta hur $w^{-1}(A)$ avbildas. Vi noterar att $w^{-1}(0, 0) = (0, 0)$, $w^{-1}(1, 1) = (1, 0)$ och $w^{-1}(1, 0) = (1/2, 1/2)$. Vår nya integrationsmängd A' är alltså triangeln som spänns upp av punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1/2, 1/2)$.

Nu kan vi tillämpa Sats 4.5.2. och får att

$$\begin{aligned}
\int\int_A (x + y)dxdy &= \int\int_{A'} (u + v + u - v) \, |-2| dudv = 4 \int\int_{A'} udvdu \\
&= 4 \left(\int_0^{1/2} \int_0^u udvdu + \int_{1/2}^1 \int_0^{1-u} udvdu \right) \\
&= 4 \left(\Big/_0^{1/2} \frac{u^3}{3} + \Big/_{1/2}^1 \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \\
&= 4 \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right) \\
&= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Kontrollräkning:

$$I = \int_0^1 \int_0^x (x+y)dydx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}.$$

2. Anta att $A = \{(x,y) : 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Beräkna integralen

$$\int \int_A \log(x^2+y^2)dxdy$$

genom att byta till polära koordinater $(x,y) = w(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Lösning. Integreringsområdet är alltså $A = \{1/2 \leq r \leq 2\}$. Vi får att

$$\int \int_A \log(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^2 \log(r^2) r dr d\varphi = 2 \cdot 2\pi \int_{1/2}^2 r \log(r) dr,$$

varav vi enligt uppg. 6/9 får att

$$\int \int_A \log(x^2+y^2)dxdy = \frac{\pi}{4}(34\log 2 - 15).$$

3. Beräkna integralen

$$\int \int_A (x^2+y^2)dxdy,$$

där $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

Lösning. Vi använder polära koordinater. Integreringsområdet är alltså $\{r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$. Vi får att

$$\int \int_A (x^2+y^2)dxdy = \int_0^\pi \int_0^2 (r^2) \cdot r dr d\varphi = \pi \Big/_0^2 \frac{r^4}{4} = 4\pi.$$

4. Anta att $f(x,y) = \max(x,y)$ då $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ och $D = [0,1] \times [0,1]$. Bestäm integralen

$$\int \int_D f(x,y)^2 dxdy$$

genom att integrera med hjälp av nivåkurvor. *Tips*: observera att $G_t = \{(x,y) \in D : f(x,y) \leq t\}$ är också en rektangel.

Lösning. Enligt tipset observerar vi att nivåkurvårna $G_t = \{(x,y) \in D : f(x,y) \leq t\}$ är kvadrater, varav $area(G_t) = t^2 = A(t)$. Låt nu $g(x,y) = \max(x,y)$ och $h(t) = t^2$. Vi kan tillämpa Sats 4.6.1. Vi får att

$$\begin{aligned}\int\int_D f(x,y)^2 dxdy &= \int\int_D h(\max(x,y))dxdy = \int_0^1 h(t)A'(t)dt \\ &= \int_0^1 t^2 2tdt = 2\Big/_0^1 \frac{x^4}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5. Visa att den oegentliga integralen

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}$$

konvergerar samt bestäm värdet.

Lösning. Vi får att

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{\sqrt{xy}} &= \int_0^1 \lim_{c \to 0} \int_c^1 \frac{dxdy}{\sqrt{xy}} = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\lim_{c \to 0} \Big/_c^1 \sqrt{x} \right) dy \\ &= 2\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\lim_{d \to 0} \int_d^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4\lim_{d \to 0} \Big/_d^1 \sqrt{y} = 4.\end{aligned}$$

6. Undersök om den oegentliga integralen

$$\int\int_A e^{-x-y} dxdy$$

konvergerar, där $A = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x\}$. Bestäm värdet av integralen ifall den konvergerar.

Lösning. Vi vill alltså undersöka integralen

$$\begin{aligned}\int\int_A e^{-x-y} dxdy &= \int_0^\infty \int_0^x e^{-x-y} dydx = \int_0^\infty \left(e^{-x} \Big/_0^x - e^{-y} \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(e^{-x}(1 - e^{-x}) \right) dx = \int_0^\infty \left(e^{-x} - e^{-2x} \right) dx \\ &= \lim_{M \to \infty} \int_0^M \left(e^{-x} - e^{-2x} \right) dx = \lim_{M \to \infty} \Big/_0^M - e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} \\ &= \lim_{M \to \infty} -e^{-M} + \frac{e^{-2M}}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$