INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Vektoranalys
Räkneövning 1
Torsdag 26.1.2012
Alexander Kainberg

1. Anta att vektorerna $x, y \in \mathbf{R}^n$ satisfierar $\|x\| = \|y\| = 1$. Vilken är den största möjliga längden $\|x - 2y\|$ för differensvektorn $x - 2y$? *Tips*: utveckla $\|x - 2y\|^2 = (x - 2y) \cdot (x - 2y)$ och notera att Cauchy-Schwartz olikhet ger gränser för skalärprodukten $x \cdot y$.

Lösning. Vi använder oss av tipset.

$$\begin{aligned}\|x - 2y\|^2 &= (x - 2y) \cdot (x - 2y) = x \cdot x - 2x \cdot y - 2x \cdot y + 4y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 4\|y\|^2 + 4x \cdot y = 1 + 4 - 4x \cdot y \\ &= 5 + 4x \cdot y \leq 5 + 4\|x\|\|y\| = 9,\end{aligned}$$

varav $\|x - 2y\| \leq 3$. Likheten uppfylls t.ex då $x = -y$.

2. Verifiera att *parallellogramregeln*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in \mathbf{R}^n,$$

gäller för normen $\|u\|^2 = u \cdot u$ i $\mathbf{R}^n$. Illustrera geometriskt då $n = 2$.

Lösning. Det är bara att räkna:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) + (x - y) \cdot (x - y) \\ &= x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y + x \cdot x - 2x \cdot y + y \cdot y \\ &= 2(x \cdot x + y \cdot y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

3. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{k \to \infty} (0, \sin(1/k), (1 + k)^{1/k})$$

i $\mathbf{R}^3$. (Det är nyttigt att veta $\log((1 + k)^{1/k}) = (1/k) \log(1 + k)$.)

Lösning. Enligt Sats 1.2.4 konvergerar följden omm varje koordinat konvergerar mot något tal. Den första koordinaten är alltid 0. Vi räknar de andra gränsvärden:

$$\lim_{k\to\infty} \sin(1/k) = \sin(0) = 0$$

och

$$\lim_{k\to\infty} (1+k)^{1/k}. \tag{1}$$

Vi beräknar gränsvärdet i (1) genom att undersöka dess logaritm. Vi får alltså

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \log((1+k)^{1/k}) &= \lim_{k\to\infty} (1/k)\log(1+k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(1+k)}{k} \\ &\overset{l'H}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{1+k}}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+k} = 0.\end{aligned}$$

Då logaritmen av (1) går mot 0, får vi

$$\lim_{k\to\infty} (1+k)^{1/k} = \log(0) = 1.$$

Detta innebär att

$$\lim_{k\to\infty} (0, \sin(1/k), (1+k)^{1/k}) = (0, 0, 1).$$

4. Anta att $(x^{(k)}) \subset \mathbf{R}^n$ är en begränsad vektorföljd i $\mathbf{R}^n$, dvs. det finns en konstant $C < \infty$ så att $\|x^{(k)}\| \leq C$ för varje $k \in \mathbf{N}$. Undersök om vektorföljden $(y^{(k)})$ alltid konvergerar i $\mathbf{R}^n$, då

$$y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\sqrt{k}}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Lösning. Att $\|x^{(k)}\| \leq C$ för varje $k \in \mathbf{N}$ innebär också att varje koordinat är begränsad, d.v.s. $x_i^{(k)} \leq C$ för alla $i \in \mathbf{N}$. Därför gäller att

$$y_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k)}}{\sqrt{k}} \leq \frac{C}{\sqrt{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

varav $y^{(k)}$ konvergerar mot nollvektorn.

5. Visa att den öppna rektangeln

$$(0,1) \times (0,1) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

är en öppen mängd i $\mathbf{R}^2$, och att motsvarande slutna rektangel $[0,1]\times[0,1]$ är en sluten mängd i $\mathbf{R}^2$. *Tips:* rita en bild för $(0,1)\times(0,1)$. Gränsvärdesvillkoret är användbart för fallet $[0,1] \times [0,1]$.

Lösning. Vi börjar med att visa att $A = (0,1) \times (0,1)$ är en öppen mängd. Detta kan man göra genom att välja en punkt i området och sedan hitta en öppen omgivning till punkten (i vårt fall en öppen kula), som hör till mängden.

Låt $0 < x < 1$ och $0 < y < 1$, $x, y \in \mathbf{R}$, vara godtyckliga. Vi väljer en kula $B^2((x,y),r)$ nu gäller det bara att hitta en passlig radie. Grafiskt kan vi lätt föreställa oss att en passlig radie skulle vara

$$r = \min(y, x, (1-x), (1-y)),$$

varav $B^2((x,y),r) \subset A$. Vi vill nu visa att om $a = (a_1, a_2) \in B^2((x,y),r)$ s+ gäller att $a \in A$. Om $a \in B^2((x,y),r)$ gäller att $|x - a_1| < r$ (symmetriskt för y) vilket är ekvivalent med att $1 > x + r > a_1 > x - r > 0$. Vi har alltså visat att A är en öppen mängd.

Genom att titta på vår bild ser vi lätt att ∂A är kvadraten som har hörnpunkterna $(0,0), (1,0), (1,1)$ och $(0,1)$. Vi vet nu att det slutna höljet till A, d.v.s. $A \cup \partial A = [0,1] \times [0,1]$ är en sluten mängd.

6. Är $(0,1) \times (0,1)$ eller $[0,1] \times [0,1]$ kompakta mängder i $\mathbf{R}^2$? Motivera!

Lösning. Enligt Sats 1.3.9 är en mängd kompakt endast om den är sluten och begränsad varav $[0,1] \times [0,1]$ är kompakt, men $(0,1) \times (0,1)$ är inte det.