TOPOLOGIA II – 2. KURSSIKOE (4.5.2012)

RATKAISUT

(1.) a) Ks. kirjan kohta 8.6. $\boxed{2p}$

b) Selvästi $f : X \to A$ surjektio ja (olet. mukaan) jatkuva.

Olk. $V \subset A$ s.e. $f^{-1}V \overset{\circ}{\subset} X$. Koska $f|A = \mathrm{id}_A$, pätee

$V = A \cap f^{-1}V$. Relat. tgran määr. $\Rightarrow$ $V \overset{\circ}{\subset} A$.

$\therefore$ A:n (relatiivi) tgra on f:n X:stä koindusoima. $\boxed{3p}$

(2.) Olet. $U_j \overset{\circ}{\subset} X$ $(j \in J)$ s.e.

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset \bigcup_{j \in J} U_j \quad \text{(avoin peite)}$$

Val. $j_0 \in J$ s.e. $a \in U_{j_0}$.

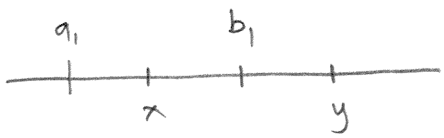
Koska $x_n \to a$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n \in U_{j_0}$ $\forall n > n_0$. $\boxed{3p}$

Jokaisella $n = 1, \dots, n_0$ val. $j_n \in J$ s.e. $x_n \in U_{j_n}$.

Tällöin $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset \bigcup_{n=0}^{n_0} U_{j_n}$ (äärellinen osapeite) $\boxed{2p}$

(3.) Väite: $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ on säännöllinen

T_1: Ol. $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$.



Val. $a_1 \in \mathbb{Q} \cap \,]-\infty, x[$

$b_1 \in \,]x, y[\setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $[a_1, b_1] \in \mathcal{B}$ on x:n ystö jolle $\not\ni y$

Val. $a_2 \in \mathbb{Q} \cap \,]x, y[$

$b_2 \in \,]y, \infty[\setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $[a_2, b_2] \in \mathcal{B}$ on y:n ystö jolle $\not\ni x$

$\therefore$ $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ on T_1. $\boxed{2p}$

$\underline{\underline{T_3}}$: Ol. A sulj. joukko $(\mathbb{R},\mathcal{T})$:ssä, $x \in \mathbb{R} \setminus A$.

$\exists$ $[a,b[\in \mathcal{B}$ s.e.

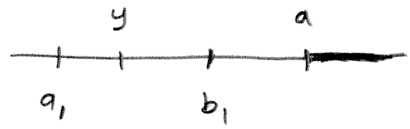
$$x \in [a,b[\subset \mathbb{R} \setminus A$$

$$\Rightarrow \quad A \subset \mathbb{R} \setminus [a,b[.$$

Osoit. että $\mathbb{R} \setminus [a,b[$ on avoin. Olk. $y \in \mathbb{R} \setminus [a,b[$.

- Jos $y < a$, val. $a_1 \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, y[$, $b_1 \in]y, a[\setminus \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \quad y \in \underbrace{[a_1, b_1[}_{\in \mathcal{B}} \subset \mathbb{R} \setminus [a,b[$$



- Jos $y \geq b$, val.

$a_2 \in \mathbb{Q} \cap]b, y[$, $b_2 \in]y, \infty[\setminus \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \quad y \in \underbrace{[a_2, b_2[}_{\in \mathcal{B}} \subset \mathbb{R} \setminus [a,b[. \qquad \therefore \ \mathbb{R} \setminus [a,b[\text{ avoin}$$

$\therefore$ $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ on T_3. $\boxed{3p}$

4. N_2: kirjan kohta 12.3

Lindelöf: kirjan kohta 12.13 $\boxed{1p}$

$N_2 \Rightarrow$ Lindelöf: kirjan lause 12.14 $\boxed{3p}$

Esim. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{pa})$, jossa $\mathcal{T}_{pa}$:n kanta on $\{[a,b[\mid a < b\}$, on Lindelöf muttei N_2. Kirjan esim. 12.20. $\boxed{1p}$

5. Lauseen muotoilu $\boxed{1p}$, todistus $\boxed{4p}$

Ks. kirjan lauseet 10.8 ja 17.6.