Topologia II – 2. kurssikoe (4. 5. 2012)

Vastaa valintasi mukaan neljään tehtävään.

1. a) Mikä on samastuskuvauksen määritelmä?

   b) Olkoon X topologinen avaruus, $A \subset X$ sen osajoukko ja $f\colon X \to A$ sellainen jatkuva kuvaus, että $f(x) = x$ kaikilla $x \in A$. Osoita, että f on samastuskuvaus.

2. Olkoon X topologinen avaruus ja (x_n) sen jono, joka suppenee kohti pistettä $a \in X$. Osoita, että joukko $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ on kompakti.

3. Kokoelma $\mathcal{B} = \{[a, b] : a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ a < b\}$ on $\mathbb{R}$:n erään topologian $\mathcal{T}$ kanta. Tutki, onko avaruus $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ säännöllinen. (Tässä $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko.)

4. *(teoria)* Mitä tarkoitetaan topologisen avaruuden N_2-ominaisuudella? Entä Lindelöf-ominaisuudella? Todista, että jokainen N_2-avaruus on Lindelöf. Anna vielä esimerkki topologisesta avaruudesta, joka on Lindelöf mutta ei N_2 (perusteluja ei vaadita, mutta määrittele avaruuden topologia selkeästi).

5. *(teoria)* Muotoile huolellisesti ja todista Bairen lause joko täydellisten metristen avaruuksien tai lokaalisti kompaktien Hausdorffin avaruuksien tapauksessa. (Saat valita, kumman tapauksen käsittelet.)