TOPOLOGIA II – 1. KURSSIKOE (2.3.2012)

RATKAISUT

1. $\partial A = \{ x \in X \mid$ jokaiselle x:n ympäristölle $V \subset X$ pätee $V \cap A \neq \emptyset \neq V \cap (X \setminus A) \}$ $\boxed{1p}$

Väite. SEV:

i) $\partial A = \emptyset$

ii) $\exists$ jva $f : X \to \mathbb{R}$ s.e. $\overline{fA} \cap \overline{f[X \setminus A]} = \emptyset$

Tod. $i \Rightarrow ii$: Olet. $\partial A = \emptyset$. Tällöin A on avoin ja suljettu.

Määr. $f = \chi_A = \begin{cases} 1 & \text{joukossa } A \\ 0 & \text{joukossa } X \setminus A \end{cases}$

f on jva jokaisessa pist. $x \in X$, sillä

1°) jos $x \in A$, niin A on x:n ystö, jossa pätee $fA = \{1\}$. $\boxed{2p}$

2°) jos $x \in X \setminus A$, niin $X \setminus A$ on x:n ystö (koska A suljettu), jossa pätee $f[X \setminus A] = \{0\}$.

$ii \Rightarrow i$: Koska f jva, niin tunnetusti

$f\overline{A} \subset \overline{fA}$, $f[\overline{X \setminus A}] \subset \overline{f[X \setminus A]}$

oletuksen (ii) nojalla siten $f\overline{A} \cap f[\overline{X \setminus A}] = \emptyset$

jolloin $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset$. Toisaalta tiedetään, $\boxed{2p}$

että $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

2. $\mathcal{A}$ on $\mathbb{R}$:n peite, sillä $\underbrace{]-\infty, 1[}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{]-1, \infty[}_{\in \mathcal{A}} = \mathbb{R}$ $\boxed{1p}$

Siten $\mathcal{A}$ on esikanta $\mathbb{R}$:n topologialle, jonka kanta koostuu $\mathcal{A}$:n jäsenten äärellisistä leikkauksista, ts. väleistä muotoa

$$]a, \infty[\quad , \quad]-\infty, b[\quad \text{ja} \quad]a, b[\qquad (a < 0 < b)$$

int $[0,1] = \emptyset$, sillä yksikään kantajoukoista ei sisälly joukkoon $[0,1]$. $\boxed{2p}$

int $[-1,1] =]-1,1[$. Syy: $]-1,1[$ on avoin (kantajoukko) joten "$\supset$" pätee. Toisaalta mikään yo. kantajoukoista ei sisällä pistettä 1 tai -1 ja samalla sisälly $[-1,1]$:een. Siis $1, -1 \notin \operatorname{int}[-1,1]$. $\boxed{2p}$

(3.) a) f:n indusoima tgia X:ssä on

$$\mathcal{T} = \{ f^{-1}V \mid V \subset Y \text{ avoin} \}$$

[kirjan kohta 4.1] $\boxed{2p}$

b) "$\Rightarrow$" Olet. $g: Z \to X$ jva. Lisäksi $f: X \to Y$ jva $\mathcal{T}$:n määritelmän nojalla. Siten $f \circ g$ jva (jvien kuvausten yhdistelmänä). $\boxed{1p}$

"$\Leftarrow$" Olet. $f \circ g: Z \to Y$ jva. Jos $U \subset X$ avoin (eli $U \in \mathcal{T}$), niin $U = f^{-1}V$, jossa $V \subset Y$ avoin. Nyt

$$g^{-1}U = g^{-1}f^{-1}V = (f \circ g)^{-1}V$$

$\boxed{2p}$

oletuksen nojalla avoin Z:ssa. Siis g jva.

[kirjan lauseet 4.6, 6.5]

(4.) Väite: A on suljettu.

Tod. A:n komplementti on

$$A^c = \{ f \in X \mid \exists\, x, y \in I \text{ s.e. } x < y,\ f(x) > f(y) \}$$ $\boxed{1p}$

Olkoon $f_0 \in A^c$. Siis $\exists\, x, y \in I$ s.e. $x < y$, $f_0(x) > f_0(y)$.

Valitaan luku $c \in \mathbb{R}$, jolle $f_0(x) > c > f_0(y)$,

ja määr.

$$U = \{ f \in X \mid f(x) > c \text{ ja } f(y) < c \} = pr_x^{-1}\,]c, \infty[\;\cap\; pr_y^{-1}\,]-\infty, c[$$ $\boxed{2p}$

jolloin $f_0 \in U \circledcirc X$.

Nyt $\forall f \in U$ pätee $f(x) > c > f(y)$, joten $U \subset A^c$.

Siis A^c on avoin eli A suljettu. $\square$ $\boxed{2p}$