Topologia II – 1. kurssikoe (2. 3. 2012)

1. Miten määritellään topologisen avaruuden X osajoukon A reuna ∂A? Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

   i) A on reunaton eli $\partial A = \emptyset$.
   ii) On olemassa jatkuva $f\colon X \to \mathbb{R}$, jolle $\overline{fA} \cap \overline{f[X \setminus A]} = \emptyset$.

2. Määritellään
$$\mathcal{A} = \{]a, \infty[\, : a < 0\} \cup \{]-\infty, b[\, : b > 0\}.$$
   Näytä, että kokoelma $\mathcal{A}$ on erään $\mathbb{R}$:n topologian esikanta. Mikä on välin $[0, 1]$ sisus (sisäpisteiden joukko) tämän topologian suhteen? Entä välin $[-1, 1]$?

3. *(teoriatehtävä)* Olkoon X joukko, Y topologinen avaruus ja $f\colon X \to Y$ kuvaus.

   a) Miten määritellään kuvauksen f indusoima topologia X:ssä? (Määritelmä riittää; ei tarvitse osoittaa sitä topologiaksi.)

   b) Varustetaan X kuvauksen f indusoimalla topologialla. Osoita, että X:llä on seuraava universaalisuusominaisuus: jos Z on topologinen avaruus ja $g\colon Z \to X$ kuvaus, niin g on jatkuva jos ja vain jos $f \circ g$ on jatkuva.

4. Olkoon $I = [0, 1]$, ja varustetaan avaruus $X = \mathbb{R}^I = \{f \mid f\colon I \to \mathbb{R}\}$ tulotopologialla. Tutki, onko joukko $A = \{f \in X \mid f \text{ on kasvava}\}$ suljettu X:ssä.

   [*Määritelmä.* f on kasvava, jos pätee $f(x) \leq f(y)$ aina kun $x \leq y$.]