

Topologia II – Harjoitus 13 (2. 5. 2012)

1. Varustetaan tulo $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ ”laatikkotopologialla”, jonka kantana ovat *kaikki* joukot $U_1 \times U_2 \times \dots$, jossa $U_n \subseteq [0, 1]$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ (ks. kirjan kohta 7.3). Osoita, että X ei ole kompakti. Onko se edes Lindelöf?
2. Palautetaan mieleen, että topologinen avaruus X on *täysin säännöllinen* (tai *Tihonovin avaruus*), mikäli se on Hausdorff ja sillä on seuraava ominaisuus: aina kun $a \in U \subseteq X$, niin on olemassa jatkuva $f: X \rightarrow [0, 1]$ siten, että $f(a) = 1$ ja $f(x) = 0$ kaikilla $x \in X \setminus U$ (ks. kirjan kohta 19.3.2). Näytä, että täysin säännöllinen avaruus on aina säännöllinen. (Väisälä 19:3)
3. Olkoon X normaali yhtenäinen avaruus, jossa on enemmän kuin yksi alkio. Osoita Urysonin lemmän avulla, että X on mahtavampi tai yhtä mahtava kuin \mathbb{R} (ts. on olemassa injektio $\mathbb{R} \rightarrow X$ tai yhtäpitävästi surjektio $X \rightarrow \mathbb{R}$). (Väisälä 19:2)
[Apu. Miten yhtenäisyys suhtautuu jatkuviin kuvauksiin, ja millaisia ovat \mathbb{R} :n yhtenäiset osajoukot?]
4. Oletetaan, että (X, d) on epätyhjä ja separoituva metrinen avaruus, jolle pätee $d(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\} \leq 1$. Olkoon $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiheä joukko X :ssä. Osoita, että kaava $f(x) = (d(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ määrittelee X :n upotuksen Hilbertin kuutioon $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. (Väisälä 19:6)
5. Olkoon (X, \mathcal{T}) Hausdorffin avaruus. Osoita, että se on täysin säännöllinen täsmälleen silloin, kun \mathcal{T} on kaikkien jatkuvien funktioiden $X \rightarrow [0, 1]$ indusoima topologia.

Aikataulua:

Ma 30. 4. klo 14–16 luento normaalisti mutta ei harjoituksia.

Vapunpäivänä ti 1. 5. ei opetusta.

Ke 2. 5. harjoitukset klo 14–16 ja viimeinen luento klo 16–18, molemmat salissa C129.

Viimeisellä luennolla vapaata keskustelua topologian aihepiireistä ja tulevista kursseista.

Lisäksi tarjotaan kahvia/teetä ja pullaa; kaikki kurssia seuranneet ovat tervetulleita!

Pe 4. 5. klo 10–12 salissa C130 ”viime hetken kyselytilaisuus” kurssin loppuosasta.

Pe 4. 5. klo 13.00–15.00 toinen kurssikoe Exactumin auditorioissa. Koealue muodostuu kirjan pykälästä 8–20 tietyin poikkeuksin, joista tarkemmin kurssin kotisivulla piakkoin.