Topologia II – Harjoitus 12 (23. ja 27. 4. 2012)

1. Todista kirjan lause 15.24: Jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia, $A \subset X$ ja $B \subset Y$ kompakteja joukkoja sekä $A \times B \subset W \Subset X \times Y$, niin on olemassa joukot $U \Subset X$ ja $V \Subset Y$ siten, että $A \times B \subset U \times V \subset W$. (Väisälä 15:6)

   [*Ohje.* Aloita tapauksesta, jossa B on yksiö.]

2. Olkoot X_j $(j \in J)$ epätyhjiä topologisia avaruuksia. Osoita, että jos tulo $X = \prod_{j \in J} X_j$ on kompakti, niin jokainen X_j on kompakti. (Väisälä 18:3)

3. Osoita, ettei $\mathbb{Q}$ ole lokaalisti kompakti. (Väisälä 17:1)

4. Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että A on lokaalisti kompakti jos ja vain jos se on lokaalisti suljettu. (Väisälä 17:5)

   [*Ohje.* Lokaalisti suljetut joukot määriteltiin harjoitusten 4 tehtävässä 6. Voit käyttää tehtävän tuloksia. Ehdon riittävyys on olennaisesti sama kuin kirjan lause 17.5.]

5. Olkoon X lokaalisti kompakti ja σ-kompakti (ks. harj. 11, teht. 4) Hausdorffin avaruus. Näytä, että X:llä on *tyhjennys* eli jono avoimia joukkoja $U_1, U_2, \ldots \subset X$ siten, että $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ ja $\overline{U_n}$ on kompakti sekä $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ kaikilla n. (Vrt. Väisälä 17:13.)

6. Olkoon $X = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{pa}})$, jossa topologian $\mathcal{T}_{\mathrm{pa}}$ kannan muodostavat välit $[a, b[$ (ks. kirjan esim. 2.11.1). Osoita, että X toteuttaa Bairen lauseen väitteen: jos $G_1, G_2, \ldots \subset X$ ovat avoimia ja tiheitä joukkoja, niin $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ on tiheä.

   Opetus. X on siis ”Bairen avaruus”, vaikka se ei ole metristyvä (kirjan esim. 11.11.2) eikä lokaalisti kompakti (seuraa esim. harjoitusten 11 tehtävästä 5) eivätkä siten Bairen lauseet 10.8 ja 17.6 ole käytettävissä.

   [*Ohje.* Riittää osoittaa, että mikä tahansa väli $[a_0, b_0[$ kohtaa G:n. Konstruoi pistejonot (a_k) ja (b_k) siten, että $a_{k-1} < a_k < b_k < b_{k-1}$ ja $[a_k, b_k[\subset G_k$. Tutki leikkausta $\bigcap_k [a_k, b_k]$.]