Topologia II – Harjoitus 11 (16. ja 20. 4. 2012)

1. Olkoot K_1 ja K_2 topologisen avaruuden X kompakteja osajoukkoja. Näytä, että $K_1 \cup K_2$ on kompakti. (Väisälä 15:2)

2. Metrinen avaruus (X, d) on *prekompakti* eli *totaalisti rajoitettu*, jos jokaisella $\epsilon > 0$ se voidaan peittää äärellisellä määrällä ϵ-säteisiä kuulia $B(x_j, \epsilon)$. Tällöin sanotaan, että keskipisteet x_j muodostavat *ϵ-verkon* X:ssä. Osoita, että prekompakti avaruus on aina rajoitettu ja että $\mathbb{R}^n$:n rajoitettu osajoukko on prekompakti. (Vrt. Väisälä 10:12)

3. Osoita, että metrinen avaruus on (jono)kompakti jos ja vain jos se on prekompakti ja täydellinen. (Väisälä 16:1)

4. Topologinen avaruus on *σ-kompakti*, jos se on numeroituva yhdiste kompakteista joukoista. Osoita, että $\mathbb{R}^n$:ssä sekä avoimet että suljetut joukot ovat σ-kompakteja. Anna esimerkki $\mathbb{R}$:n osajoukosta, joka on σ-kompakti mutta ei avoin eikä suljettu. (Väisälä 15:13)

   [*Muista.* Harjoitus 8, tehtävä 2.]

5. Olkoon K kompakti joukko avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$, jossa $\mathcal{T}_{\text{pa}}$ on ”puoliavoin topologia” (ks. kirjan kohta 2.11.1). Näytä, että K on numeroituva.

   [*Vihje.* Jokaista $x \in K$ kohti on olemassa väli $]a_x, x[$, joka ei leikkaa K:ta.]

6. Olkoon (f_n) sellainen jono jatkuvia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on olemassa raja-arvo $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Osoita, että niiden pisteiden joukko, joissa g on epäjatkuva, on laiha $\mathbb{R}$:ssä ja siten g:n jatkuvuuspisteiden joukko on tiheä.

   Esimerkki. Derivoituvan funktion f derivaatta $\lim_{n\to\infty} n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$ on muotoa g.

   [*Ohje.* Osoita, että epäjatkuvuuspisteet sisältyvät yhdisteeseen $\bigcup_{n,m} \partial F_{n,m}$, jossa $F_{n,m} = \{x : |f_k(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{m} \text{ jokaisella } k \ge n\}$. Käytä Bairen lausetta. *Laiha joukko* tarkoittaa numeroituvaa yhdistettä *harvoista joukoista* eli sellaisista joukoista A, joille $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$ (ks. kirjan tehtävä 10:9).]

Pääsiäisloma 5.–11. 4. Luennot ja harjoitukset jatkuvat ma 16. 4.