

## Topologia II – Harjoitus 10 (2. 4. ja 13. 4. 2012)

1. Topologinen avaruus on *nollaulotteinen*, mikäli sillä on kanta, joka koostuu reunattomista joukoista eli joukoista, jotka ovat avoimia ja suljettuja. Näytä, että tällainen avaruus on aina  $T_3$ .
2. Näytä, että tekijäavaruus  $\mathbb{R}/[0,1[$  (ks. kirjan kohta 9.6) on  $T_0$  ja  $T_4$  muttei  $T_1$  eikä siten normaali.  
*Opetus.* Ei-suljetun joukon luhistaminen pisteeksi ei yleensä ole mielekästä. Vrt. myös kirjan harjoitustehtävät 9:4 ja 9:5.
3. Onko irrationaalilukujen joukko  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (tavallisessa topologiassa) separoituva? (Väisälä 12:6) Jos on, esitä eksplisiittisesti jokin sen numeroituva ja tiheä osajoukko.
4. Osoita, että separoituvuus ja Lindelöfin ominaisuus säilyvät jatkuviissa kuvauksissa. Tämä tarkoittaa seuraavaa: Oletetaan, että  $X$  on separoituva (vast. Lindelöf) ja  $f: X \rightarrow Y$  jatkuva. Tällöin  $fX$  on separoituva (vast. Lindelöf), kun se varustetaan  $Y$ :stä perimällään relatiivitopologialla. (Väisälä 12:10)
5. Olkoon  $X$  jokin joukko varustettuna kofiniitillä topologialla (ks. harj. 1, teht. 5). Osoita, että  $X$  on kompakti ja siten Lindelöf. Onko  $X$  separoituva?  
Lisätehtävä väsymättömille: Milloin  $X$  on  $N_1$  tai  $N_2$ ?
6. Olkoon  $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Määritellään, että  $U \subset X$  on avoin, jos i)  $0 \notin U$  tai ii)  $\#U^{(n)}/n \rightarrow 1$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , jossa  $U^{(n)} = U \cap \{1, \dots, n\}$  ja merkintä  $\#A$  tarkoittaa joukon  $A$  alkioden lukumäärää. (Ehto ii voidaan ilmaista sanomalla, että  $U$ :n *tiheys* on 1.) Näytä:
  - a) Em. joukot muodostavat  $X$ :n topologian, joka on Hausdorff.
  - b)  $0$  on joukon  $\mathbb{N}$  kasautumispiste.
  - c)  $0$ :lla ei ole numeroituvaa ympäristökantaa, joten  $X$  ei ole  $N_1$ .*Opetus.* Numeroituvakaan topologinen avaruus ei ole välttämättä  $N_1$ . Lisätehtävänä voit todeta, että numeroituva avaruus on kuitenkin aina Lindelöf ja separoituva ja että  $N_1$  ja  $N_2$  ovat siinä yhtäpitävät.

**Pääsiäisloma** 5.–11. 4. Näitä harjoituksia käsitellään ennen (ma) ja jälkeen (pe) pääsiäisen.